

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

з основами теорії пружності.

Змістовий модуль 4.

Основи теорії пружності

Методичні рекомендації
до самостійної роботи та дистанційного навчання
здобувачів вищої освіти
спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія»
ОП «Промислове і цивільне будівництво»

Київ 2024

УДК 539.3

О - 61

Укладачі: Л.О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук., доцент

Д.В. Левківський, канд. техн. наук., доцент

Рецензент: О.П. Корбаков, канд. техн. наук., доцент

Відповідальний за випуск: О.П. Кошевий, канд. техн. наук,
завідувач кафедри

Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 6 від 3 квітня 2024 року.

Опір матеріалів з основами теорії пружності. Змістовий модуль 4. Основи теорії пружності: методичні рекомендації для самостійної роботи та дистанційного навчання здобувачів вищої освіти спеціальності БЦІ. Уклад.: Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, І.В. Жупаненко, М.О. Янсонс. – Київ.: КНУБА, 2024. – 40 с.

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів щодо змістового модуля 3 вибіркового курсу «Опір матеріалів з основами теорії пружності» складаються з теоретичних відомостей, прикладів оформлення звітів та завдань до виконання розрахунково-графічної роботи №4. Для здобувачів вищої освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» ОП «Промислове і цивільне будівництво».

©КНУБА, 2024

ЗМІСТ

Загальні рекомендації.....	4
1. ТЕОРЕТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕХАНІКИ ДЕФОРМУВАННЯ	
ТВЕРДИХ ТІЛ.....	5
1.1. Напруження . Рівняння рівноваги.....	5
1.2. Тензор напружень.....	8
1.3. Девіатор тензора напружень.....	13
1.4. Деформації. Тензор деформацій. Девіатор тензора деформацій.....	16
1.5. Узагальнений закон Гука).....	18
1.6. Постановка задач теорії пружності.....	19
1.7. Граничний стан. Теорії міцності.....	20
Контрольні запитання.....	24
2. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗА ЗАДАНИМ	
ТЕНЗОРОМ НАПРУЖЕНЬ.....	25
2.1. Постановка задачі.....	25
2.2. План виконання завдання.....	25
2.3. Приклад.....	25
3. РОЗРАХУНОК ОСЕСИМЕТРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА.....	38
3.1. Внутрішні зусилля в оболонках.....	38
3.2. Тонкостінний резервуар.....	39
3.3. Умова міцності резервуара.....	42
3.4. Розпірні кільця в оболонках.....	45
3.5. Приклад розрахунку тонкостінного резервуара	46
Контрольні запитання	48
ДОДАТКИ.....	49
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	52

Загальні рекомендації

Методичні рекомендації описують теоретичні співвідношення механіки деформування твердого тіла та порядок виконання розрахунково– графічної роботи «Аналіз просторового напруженого стану». Дана робота входить в загальний цикл робіт по курсу опору матеріалів і теорії пружності для здобувачів вищої освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» ОП «Промислове і цивільне будівництво».

Перед виконанням завдань необхідно опрацювати відповідні розділи теоретичного курсу, які достатньо широко освітлено в п.1 методичних вказівок.

В п.2 наводиться постановка задач, план виконання завдання та числовий приклад. Дані для індивідуальних завдань вибираються з додатків відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа.

Робота виконується на аркушах А4 (297×210 мм), які зшиваються в альбом з лівої сторони. Завдання повинно мати титульний аркуш за формою, наведеною в дод. 1. Розрахунки та пояснення слід писати на одному боці аркуша кульковою ручкою, рисунки дозволяється виконувати олівцем. Виконуючи кожен етап розрахунку, спочатку наводиться розрахункова формула, підставляються числові дані, а потім записується кінцевий результат з одиницею виміру отриманої величини.

При здачі роботи студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу.

1. ТЕОРЕТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕХАНІКИ ДЕФОРМУВАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Напруження. Рівняння рівноваги.

Тверді тіла знаходяться під впливом зовнішніх сил. Зовнішні сили бувають поверхневі, які прикладені до поверхні тіла, і об'ємні, або масові, які діють у внутрішніх точках тіла. При навантаженні зовнішніми силами тіло деформується. При деформуванні твердого тіла в ньому виникають внутрішні сили. Для їх аналізу користуються методом перерізів та аксіомою отвердіння і аксіомою звільнення від в'язей. Мірою внутрішніх сил в малому околі точки M на елементарній площадці площею dA із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}$ є напруження σ_n , яке дорівнює граничному значенню відношення сили $\mathbf{F}_n$, що діє на цю площадку, до її площі dA , коли остання прямує до нуля

$$\sigma_n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_n}{dA} \quad (1.1)$$

Напруження вимірюються в паскалях ($Pa = \frac{H}{m^2}$).

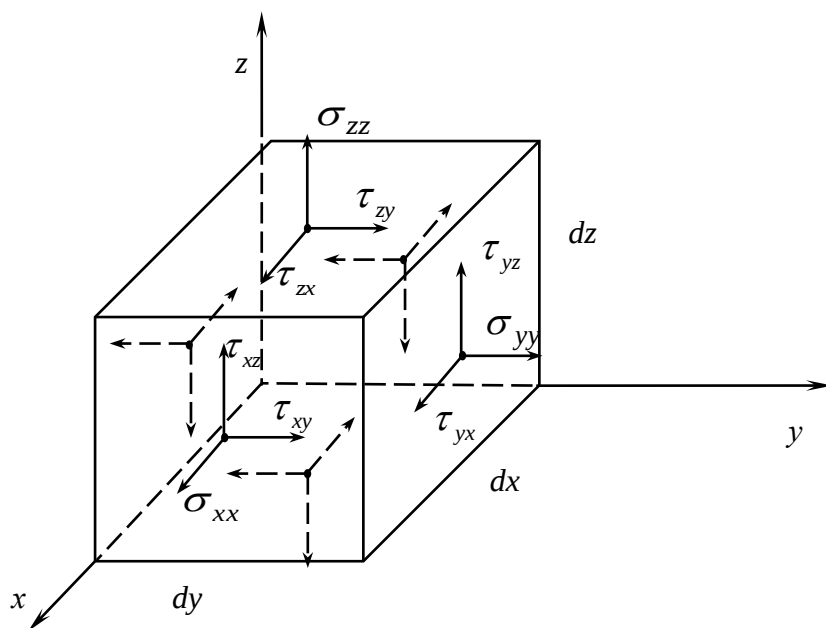


Рис. 1.1. Напруження на гранях елементарного паралелепіпеда

Таким чином в довільній точці M тіла кожному одиничному вектору нормалі $\mathbf{n}$, що визначає орієнтацію нескінченно малої площадки, ставиться у відповідність вектор напружень σ_n . Сукупність всіх пар векторів σ_n та $\mathbf{n}$ в точці M визначає напружений стан в цій точці. Для опису напруженого стану в точці достатньо задати вектори

напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках з одиничними векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, які є ортами декартових прямокутних координатних вісей x, y, z з правосторонньою орієнтацією. На цих площадках будуть діяти век-

тори напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ з компонентами $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$; $\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$; $\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$ (перший індекс вказує номер площадки, другий індекс— номер вісі, вздовж якої направлена складова вектора). Напруження $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ називаються нормальними, а $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ — дотичними напруженнями. На рис. 1.1 показані додатні напрямки напружень.

На довільній елементарній площадці з одиничною нормаллю $\mathbf{n}$, напрямні косинуси якої n_1, n_2, n_3 , діє вектор напружень σ_n . Його компоненти $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ (проекції на координатні вісі x, y, z) (рис. 1.2) визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z, \\ \sigma_{ny} &= \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z, \\ \sigma_{nz} &= \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z\end{aligned}\quad (1.2)$$

через напруження на площадках, перпендикулярних координатним вісям x, y, z .

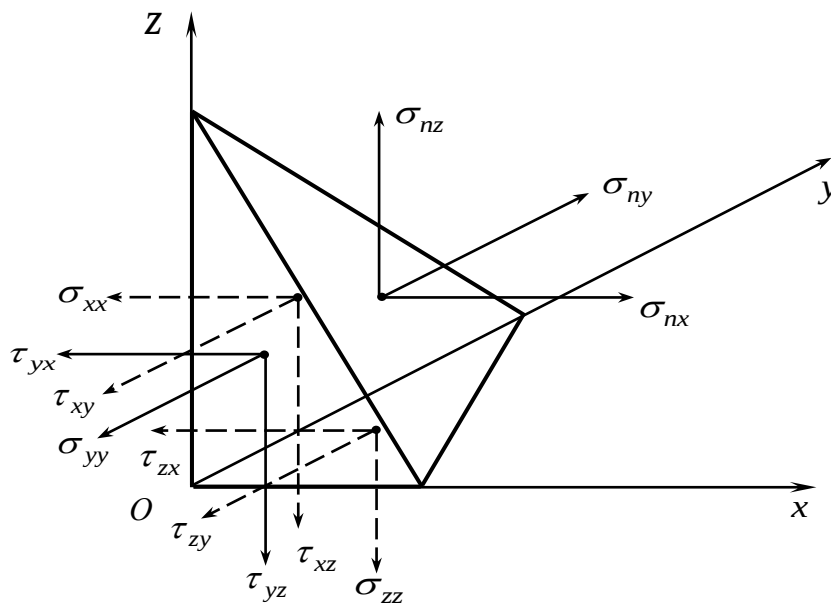


Рис. 1.2. Рівновага елементарного тетраедра

Ці формули одержані з умов рівноваги трикутної призми (рис.1.2), яку утворено шляхом зміщення похилої елементарної площадки з нормаллю $\mathbf{n}$ на $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ з точки O , через яку вона проходить.

Знаючи компоненти $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ вектора σ_n , знаходимо його модуль

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2} \quad (1.3)$$

Проекція σ_{nn} вектора повного напруження σ_n на одиничну нормаль $\mathbf{n}$ дорівнює

$$\sigma_{nn} = \sigma_n \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \sigma_{nn} = \sigma_{nx} \cdot n_x + \sigma_{ny} \cdot n_y + \sigma_{nz} \cdot n_z \quad (1.4)$$

Векторна різниця

$$\sigma_n - \sigma_{nn} \mathbf{n} = \tau_{ns} \quad (1.5)$$

вектора повного напруження σ_n і вектора нормального напруження $\sigma_{nn} \mathbf{n}$ є вектором дотичного напруження τ_{ns} , який лежить в площині, перпендикулярній до нормалі $\mathbf{n}$. Векторна нормальна складова σ_{nn} вектора повного напруження σ_n повністю характеризується її проекцією σ_{nn} на зовнішню одиничну нормаль $\mathbf{n}$; для векторної дотичної складової τ_{ns} такої можливості немає до тих пір, поки не буде введена плоска система одиничних взаємно-перпендикулярних векторів $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ на елементарній площадці (вектори $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{n}$ повинні утворювати праву трійку). Модуль τ_{ns} вектора дотичного напруження знаходиться за теоремою Піфагора

$$\tau_{ns} = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2}. \quad (1.6)$$

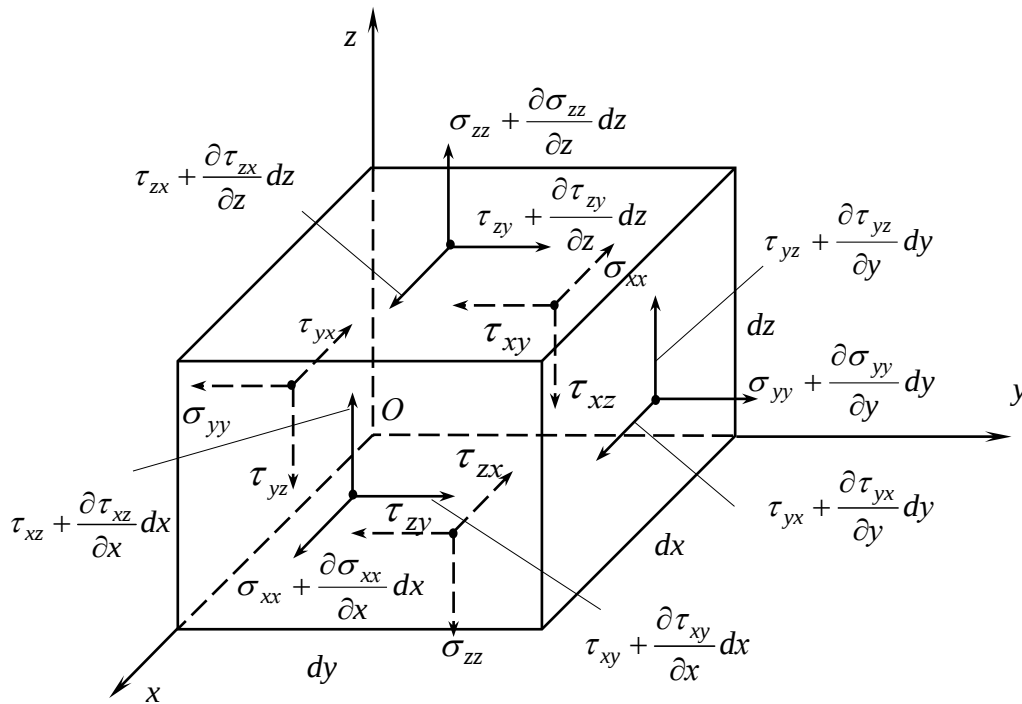


Рис. 1.3. Напруження на гранях елементарного паралелепіпеда

З умов рівноваги нескінченно малого паралелепіпеда (рис.1.3), а саме рівності нулеві головного моменту і головного вектора сил, що діють на нього, знаходяться співвідношення

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad (1.7)$$

які називаються *правилом парності дотичних напружень*, і диференціальні рівняння рівноваги в частинних похідних

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Масові сили F_x, F_y, F_z на одиницю об'єму мають розмірність $\frac{H}{m^3}$.

1.2. Тензор напружень.

Сукупність напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через вибрану точку тіла, утворюють симетричний тензор напружень другого рангу і записуються в вигляді матриці

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Тензор – це сукупність величин, які при переході від системи координат x, y, z до іншої системи координат x', y', z' перетворюються по закону

$$\sigma_{i'j'} = \lambda_{i'm} \lambda_{j'n} \sigma_{mn}, \quad (1.10)$$

де

$$\lambda_{i'm} = \cos(x'_i, x_m) \quad (1.11)$$

– направляючі косинуси вісей x'_i відносно вісей x_m .

В формулі (1.10) і далі застосовується тензорне правило сумування по “німих” індексах $a_j b_j = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, $j = x, y, z$.

Формули перетворення (1.10) виводяться на основі залежностей (1.2) , записаних у вигляді

$$\sigma_{i'n} = \sigma_{mn} \lambda_{i'm} \quad (1.12)$$

та формул проектування векторів $\sigma_{i'}$ на вісі x'_1, x'_2, x'_3

$$\sigma_{i'j'} = \sigma_{i'n} \lambda_{j'n}, \quad (1.13)$$

почергове застосування яких $\sigma_{i'j'} = \lambda_{i'm} \lambda_{j'n} \sigma_{mn}$ приводить до правила (1.10) перетворень компонент тензора напружень.

В науковій літературі для напружень частіше вживаються позначення

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z,$$

$$\sigma_{12} = \tau_{xy}, \sigma_{13} = \tau_{xz}, \sigma_{23} = \tau_{yz}$$

в системі координат $x_1 \approx x, x_2 \approx y, x_3 \approx z$.

В кожній точці тіла існують три взаємно перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулеві. Ці площадки називаються *головними*; нормальні напруження на цих площадках називаються *головними нормальними напруженнями*. Головні нормальні напруження і одиничні вектори головних площадок визначаються з системи трьох однорідних рівнянь

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= 0, \\ \tau_{yx}n_x + (\sigma_{yy} - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0, \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_{zz} - \sigma)n_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

при умові $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. З умови існування ненульового (нетривіального) розв'язку (1.14) одержимо кубічне рівняння для визначення головних напружень

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \quad (1.15)$$

Коефіцієнти цього рівняння

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\ I_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

називаються *інваріантами*, так як вони не залежать від напрямку координатних осей. Головні напруження (корені рівняння(1.15)) будемо позначати, дотримуючись умови $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Для кожного σ_i по розв'язку системи (1.14) знаходяться одиничні вектори $\mathbf{n}^{(i)}$ головних площадок, дотримуючись умови

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (1.17)$$

і правосторонньої їх орієнтації, тобто

$$\mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{n}^{(3)}. \quad (1.18)$$

Для визначення коренів кубічного рівняння (1.15) (головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) треба скористатися стандартною програмою (MatLab, MathCad або ін.) знаходження коренів алгебраїчних рівнянь.

Для визначення головних напружень і головних площадок можна також скористатися стандартною програмою сучасних обчислювальних комплексів для визначення власних значень і власних векторів симетричної матриці з дійсними компонентами

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Тензору напружень можна поставити в відповідність деякий геометричний об'єкт, тобто надати тензору *геометричну інтерпретацію*.

Позначимо головні вісі тензора напружень як x_1, x_2, x_3 . В такому разі для напружень на довільній площадці з напрямними косинусами n_1, n_2, n_3 (відносно головних вісей) нормалі $\mathbf{n}$ до неї з формул (1.2) одержимо

$$\sigma_{n1} = \sigma_1 n_1, \quad \sigma_{n2} = \sigma_2 n_2, \quad \sigma_{n3} = \sigma_3 n_3. \quad (1.19)$$

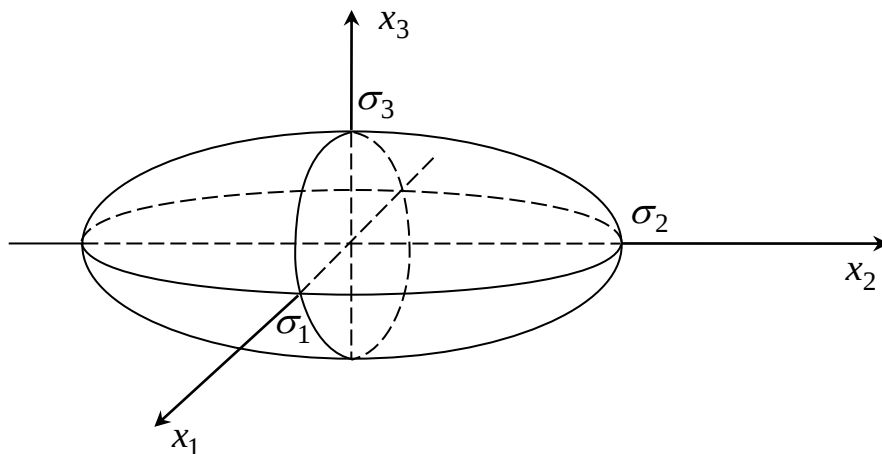


Рис. 1.4. Еліпсоїд Ламе

Оскільки

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (1.20)$$

то прийнявши в (1.19) $x_1 = \sigma_{n1}$, $x_2 = \sigma_{n2}$, $x_3 = \sigma_{n3}$, побудуємо еліпсоїд

$$\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (1.21)$$

Еліпсоїд (1.21) називається *еліпсоїдом Ламе* (рис. 1.4); він дає просторове геометричне зображення тензора напружень.

Координати кожної точки на поверхні еліпсоїда Ламе визначають напруження σ_{n1} , σ_{n2} , σ_{n3} (1.19) на площадці з заданою нормаллю (n_1, n_2, n_3) .

По еліпсоїду Ламе безпосередньо видно, що головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (піввісі еліпсоїда Ламе) приймають *екстремальні значення*.

Якщо задана нормаль (n_1, n_2, n_3) , то напруження $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$, а значить і відповідна точка на еліпсоїді, визначаються за формулами (1.19); якщо ж задана точка на еліпсоїді, тобто відомі напруження $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$, то по формулах (1.19) можна знайти нормаль (n_1, n_2, n_3) до площадки, на якій ці напруження діють.

Плоске зображення тензора напружень дає *кругова діаграма Мора*. Якщо координати x, y, z співпадають з головними вісями тензора напружень, то для проекції

$$\sigma_{nn} = \sigma_{n1}n_1 + \sigma_{n2}n_2 + \sigma_{n3}n_3$$

вектора напружень σ_n на нормаль до площадки з (1.19) матимемо

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (1.22)$$

Для квадрату модуля повного напруження σ_n по (1.19) одержимо

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2. \quad (1.23)$$

Оскільки по (1.5) або (1.6)

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nn}^2 + \sigma_{ns}^2, \quad (1.24)$$

де σ_{nn} – проекція на нормаль $\mathbf{n}$ повного напруження (нормальне напруження), σ_{ns} – проекція на площадку з нормаллю $\mathbf{n}$ повного напруження (дотичне напруження), то за формулами (1.22), (1.23), (1.24) можна визначити лише модуль дотичного напруження

$$\sigma_{ns} = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2}. \quad (1.25)$$

Побудуємо в координатах σ_{nn}, σ_{ns} круги з радіусами

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad (1.26)$$

як показано на рис. 1.5.

Кожна пара напружень σ_{nn} , σ_{ns} , що визначаються за формулами (1.22), (1.25), лежать в заштрихованій області на рис. 1.5.

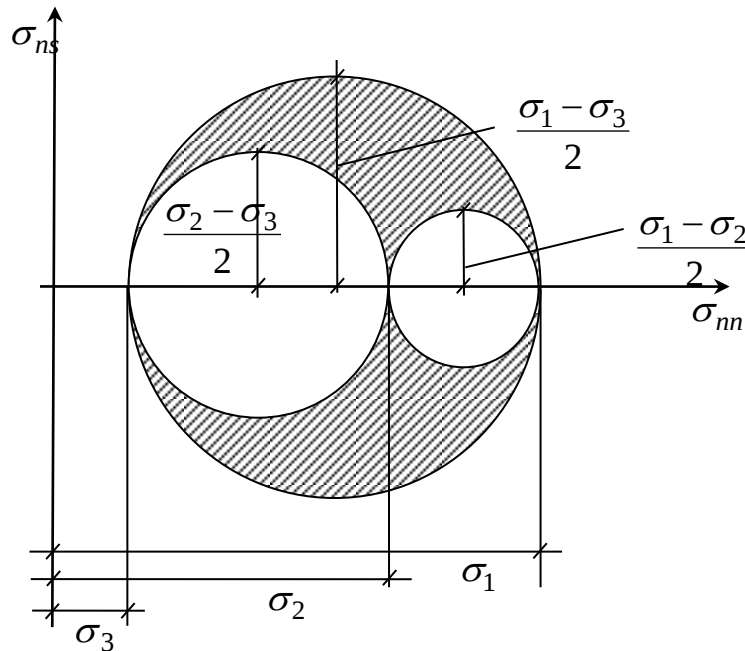


Рис. 1.5. Кругова діаграма Мора

Оскільки знак дотичного напруження за формулою (1.25) не визначається, то прийнято показувати тільки верхню половину (рис.1.6) симетричної діаграми з рис. 1.5.

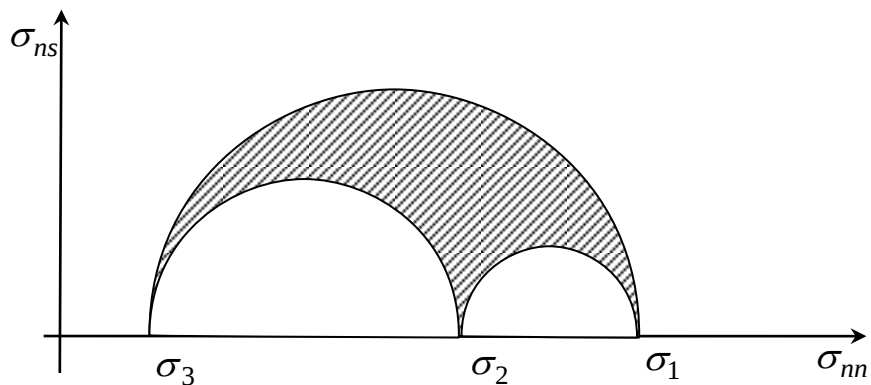


Рис. 1.6. Кругова діаграма Мора

Якщо задано нормаль n_1, n_2, n_3 до площадки, то по формулах (1.22), (1.25) знайдемо координати точки на діаграмі Мора, яка відповідає нормальному і дотичному (з точністю до знаку) напруженням на цій площадці.

З діаграми Мора безпосередньо видно, що екстремальні дотичні напруження, які ще називаються *головними*, дорівнюють

$$\tau^{(23)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau^{(12)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau^{(13)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.27)$$

Вони діють на площадках, які ділять навпіл кути між головними напруженнями (знаходяться під кутом 45° до головних площадок).

На цих площадках нормальні напруження не рівні нулеві і, як випливає з діаграми 1.5, дорівнюють

$$\sigma^{(23)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma^{(12)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma^{(13)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (1.28).$$

Найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (1.29)$$

оскільки приймається, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Діаграми Мора для різних напружених станів вважаються подібними, якщо вони мають однакові *параметри Лоде* (або Надаї-Лоде [2]), який визначається через головні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, або точніше через головні дотичні напруження, за формулою [2]

$$X_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \Rightarrow X_\sigma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (1.30)$$

Для одноосного розтягування ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) параметр Лоде $X_\sigma = -1$, для одноосного стискування ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$) $X_\sigma = 1$, для чистого зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$) $X_\sigma = 0$.

1.3. Девіатор тензора напружень.

Тензор напружень

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

можна розкласти на кульову і девіаторну складові

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_{\sigma 0} + \mathbf{D}_\sigma,$$

$$T_{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix},$$

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

де $\sigma_0 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$ – гідростатичний тиск.

Завдяки такому вибору σ_0 перший інваріант девіатора напружень дорівнює нулеві, тобто інваріанти девіатора напружень будуть такими

$$I_1(D_{\sigma}) = 0,$$

$$I_2(D_{\sigma}) = s_{11}s_{22} + s_{22}s_{33} + s_{11}s_{33} - s_{12}^2 - s_{23}^2 - s_{31}^2,$$

$$I_3(D_{\sigma}) = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.33)$$

Доцільність розкладу (1.32) обумовлена дослідними даними, з яких випливає, що при всесторонньому розтягуванні або стискуванні в матеріалах не виникають пластичні деформації.

Другий інваріант $I_2(D_{\sigma})$ через компоненти тензора T_{σ} виражається так:

$$I_2(D_{\sigma}) = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 - 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (1.34)$$

Якщо ввести інтенсивність нормальних напружень

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 - 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (1.35)$$

то тоді

$$\sigma_i = \sqrt{-3I_2(D_{\sigma})}. \quad (1.36)$$

Головні напруження девіатора напружень D_{σ} визначаються з неповного кубічного рівняння

$$s^3 + I_2(D_{\sigma})s - I_3(D_{\sigma}) = 0. \quad (1.37)$$

Розв'язок цього рівняння можна подати [2] в тригонометричній формі

$$s_1 = \frac{2}{3}\sigma_i \cos\psi_\sigma, \quad s_2 = \frac{2}{3}\sigma_i \cos(\psi_\sigma + \frac{4\pi}{3}),$$

$$s_3 = \frac{2}{3}\sigma_i \cos(\psi_\sigma + \frac{2\pi}{3}). \quad (1.38)$$

Кут ψ_σ , який прийнято називати кутом подібності девіатора напружень або кутом вигляду напруженого стану, визначається через другий і третій інваріанти девіатора напружень за формулою

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{27}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{\sigma_i^3} \Rightarrow \cos 3\psi_\sigma = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{\sqrt{-I_2^3(D_\sigma)}}, \quad (1.39)$$

яку можна отримати з рівності

$$I_3(D_\sigma) \equiv s_1 s_2 s_3 = \frac{8}{27} \sigma_i^3 \cos\psi_\sigma \cos(\psi_\sigma + \frac{2\pi}{3}) \cos(\psi_\sigma + \frac{4\pi}{3}).$$

Якщо підставити значення (1.38) головних напружень $\sigma_i = s_i + \sigma_0$ в формулу (1.30) для параметра Лоде (параметра Надаї-Лоде, [2]), то одержимо зв'язок між кутом ψ_σ і параметром Лоде

$$X_\sigma = -\sqrt{3} \operatorname{ctg}(\psi_\sigma + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow X_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\psi_\sigma - \frac{\pi}{6}) \quad (1.40)$$

Зауважимо, що формули (1.38) записуються в різних виглядах [2, 4, 7], які відрізняються один від одного різним вибором кута ψ_σ .

Оскільки параметр Лоде змінюється в межах $-1 \leq X_\sigma \leq +1$, то кут подібності девіаторів ψ_σ , як це випливає з (1.40), змінюється в межах $0 \leq \psi_\sigma \leq \frac{\pi}{3}$.

На основі формули (1.40) робимо висновок, що для одноосного розтягування ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) кут подібності девіатора $\psi_\sigma = 0$ (параметр Лоде $X_\sigma = -1$), для одноосного стискування ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 \neq 0$) кут подібності девіатора $\psi_\sigma = \frac{\pi}{3}$ (параметр Лоде $X_\sigma = 1$), для чистого зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$) кут подібності девіатора $\psi_\sigma = \frac{\pi}{6}$ (параметр Лоде $X_\sigma = 0$).

Трьох рівнянь рівноваги (1.8) недостатньо для визначення шести напружень. Для повної математичної постановки задачі треба до трьох рівнянь (1.8) відносно шести невідомих функцій σ_{ik} приєднати шість формул Коші для деформацій і шість залежностей між напруженнями і деформаціями.

1.4. Деформації.

При деформуванні твердого тіла змінюються його об'єм і форма. Характеристиками цієї зміни є деформації. Формули Коші

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{yx} &= 2\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\quad (1.41)$$

виражають деформації через компоненти вектора переміщень $\mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, w)$ матеріальної точки.

Деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ називаються *лінійними* деформаціями, $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – *деформаціями зсуву*, $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yz}$ – *кутовими* деформаціями.

Деформації (1.41) також утворюють симетричний тензор деформацій

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

що можна показати шляхом перетворення величин ε_{ij} в системі координат x, y, z до їх значень $\varepsilon_{i'j'}$ в системі координат x', y', z' .

В науковій літературі для деформацій вживаються також позначення

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{xx} = \varepsilon_x, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z, \\ 2\varepsilon_{23} &= \gamma_{yz}, & 2\varepsilon_{31} &= \gamma_{zx}, & 2\varepsilon_{12} &= \gamma_{xy}\end{aligned}$$

в координатах $x_1 \approx x, x_2 \approx y, x_3 \approx z$.

Тензор деформацій T_ε і тензор напружень T_σ мають подібні властивості.

Головні деформації і головні напрямки визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon)n_x + \varepsilon_{xy}n_y + \varepsilon_{xz}n_z = 0, \\ \varepsilon_{yx}n_x + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)n_y + \varepsilon_{yz}n_z = 0, \\ \varepsilon_{zx}n_x + \varepsilon_{zy}n_y + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)n_z = 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

при умові $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Для визначення головних деформацій з (1.46) одержимо кубічне рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0, \quad (1.47)$$

коефіцієнти якого є інваріантами тензора деформацій

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \\ I_2 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2, \\ I_3 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Екстремальні зсувні деформації

$$\varepsilon^{(23)} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}, \quad \varepsilon^{(12)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon^{(13)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \quad (1.49)$$

виникають на площадках, що ділять пополам прямі кути між площинами головних деформацій.

Тензор деформацій (1.42) можна розкласти на кульову і девіаторну складові

$$\begin{aligned} T_\varepsilon &= T_{\varepsilon 0} + D_\varepsilon, \\ T_{\varepsilon 0} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad D_\varepsilon = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

де $3\varepsilon_0 = \Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, Θ – об’ємна деформація, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0$.

Головні деформації девіатора деформацій D_ε визначаються з неповного кубічного рівняння

$$e^3 + I_2(D_\varepsilon)e - I_3(D_\varepsilon) = 0. \quad (1.51)$$

Інваріанти девіатора деформацій дорівнюють

$$\begin{aligned} I_1(D_\varepsilon) &= 0, \\ I_2(D_\varepsilon) &= e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{11}e_{33} - e_{12}^2 - e_{23}^2 - e_{31}^2, \\ I_3(D_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Другий інваріант девіатора деформацій через компоненти тензора деформацій T_ε знаходиться за формулою

$$I_2(D_\varepsilon) = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 - 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right]$$

Інтенсивність нормальних деформацій

$$\varepsilon_i = \sqrt{-\frac{4}{3} I_2(D_\varepsilon)}, \quad (1.53)$$

тобто

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 - 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}. \quad (1.54)$$

1.5. Узагальнений закон Гука.

Лінійні матеріальні залежності між напруженнями і деформаціями (узагальнений закон Гука) для ізотропного пружного тіла записується в прямій формі

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)); & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)); & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

або в оберненій формі

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z; & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}; \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z; & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Пружні сталі Ламе λ, μ пов'язані з технічними пружними сталими (модулем пружності першого роду (модулем Юнга) E , модулем пружності другого роду (модулем зсуву) G , коефіцієнтом Пуассона ν) формулами

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G. \quad (1.57)$$

Для ізотропного пружного тіла з трьох технічних сталих E, G, ν незалежними є дві, оскільки між ними існує співвідношення

$$2(1+\nu)G = E. \quad (1.58)$$

Скориставшись компонентами шарових тензорів та девіаторів напружень σ_0 , s_{ij} та деформацій ε_0 , e_{ij} матеріальні залежності можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3K\varepsilon_0, \\ \frac{e_{11}}{s_{11}} &= \frac{e_{22}}{s_{22}} = \frac{e_{33}}{s_{33}} = \frac{e_{12}}{s_{12}} = \frac{e_{13}}{s_{13}} = \frac{e_{23}}{s_{23}} = \frac{1}{2\mu}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

тобто в теорії пружності ізотропних тіл компоненти девіатора деформацій пропорційні компонентам девіатора напружень. Якщо скористатися (1.59), то з (1.35) та (1.54) одержимо

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \quad (1.60)$$

Гіпотеза пропорційності компонент девіаторів

$$\frac{e_{11}}{s_{11}} = \frac{e_{22}}{s_{22}} = \frac{e_{33}}{s_{33}} = \frac{e_{12}}{s_{12}} = \frac{e_{13}}{s_{13}} = \frac{e_{23}}{s_{23}} = \psi \quad (1.61)$$

в різних її варіаціях є основною гіпотезою деформування твердих тіл в теоріях пластичності і повзучості [2 та ін.]

1.6. Постановка задач теорії пружності.

Сукупність диференціальних (1.8) і (1.41) та алгебраїчних (1.55) або (1.56) рівнянь є системою п'ятнадцяти рівнянь відносно п'ятнадцяти невідомих: шести напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, шести деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}$, трьох переміщень u, v, w . Вони повинні виконуватися в усіх внутрішніх точках пружного тіла. Система п'ятнадцяти рівнянь може бути спрощена до системи трьох рівнянь відносно трьох переміщень (рівняння Ламе) або до системи шести рівнянь відносно шести напружень (рівняння Бельтрамі-Мітчелла). Для цих рівнянь необхідно сформулювати граничні умови на поверхні тіла. Таких умов повинно бути в кожній точці тіла три, вони вибираються по одній з трьох альтернативних пар

$$\begin{aligned} u|_S &= U^0 \quad \text{або} \quad \sigma_{nx}|_S = p_x^0, \\ v|_S &= V^0 \quad \text{або} \quad \sigma_{ny}|_S = p_y^0, \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$w|_S = \overset{0}{W} \quad \text{або} \quad \sigma_{nz}|_S = \overset{0}{p_z}.$$

Функції $\overset{0}{U}, \overset{0}{V}, \overset{0}{W}, \overset{0}{p_x}, \overset{0}{p_y}, \overset{0}{p_z}$ є відомими функціями точок поверхні тіла.

Так сформульовані крайові задачі теорії пружності мають єдиний розв'язок (з точністю до переміщення абсолютно твердого тіла).

1.7. Граничний напружений стан. Теорії міцності.

Після розв'язання математичної задачі теорії пружності (п. 1.6) треба встановити, чи забезпечує знайдений напружено-деформований стан (НДС) жорсткість та міцність тіла.

Умови жорсткості накладають обмеження на переміщення тіла, а умови міцності накладають обмеження на напружений стан тіла.

Деформативні властивості і міцність матеріалів досліджуються експериментально. Основним експериментом є експеримент на розтягування стандартних зразків. На основі цих досліджень розвиваються теоретичні співвідношення деформування і міцності.

Теорія міцності є однією із складних проблем механіки деформування твердих тіл. Ряд критеріїв міцності можна сформулювати, виходячи з того, що в просторі напружень існує деяка поверхня, при досягненні сукупністю напружень якої матеріал руйнується. Виходячи з цього можна сформулювати критерії міцності. В опорі матеріалів застосовуються декілька варіантів таких критеріїв (теорій міцності).

Якщо для напруженого стану виконується умова граничного стану, то матеріал починає руйнуватися. Для забезпечення міцності вводиться допустиме напруження

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{n_u}.$$

Коефіцієнт запасу міцності n_u завжди більший одиниці, і його раціональний вибір зумовлюється технічними умовами експлуатації тіла.

За *першою теорією міцності* (критерій найбільших нормальних напружень, критерій Галілея або Ранкіна) граничний стан настає при досягненні максимальним нормальним напруженням свого граничного значення.

Визначивши головні нормальні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, рівняння граничного стану можна записати у вигляді

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) = \sigma_u.$$

Ця теорія застосовується переважно для крихких матеріалів, що руйнуються переважно шляхом відриву (крихке руйнування). Граничне напруження σ_u приймається рівним границі тимчасового опору σ_e , тобто $\sigma_u = \sigma_e$.

Таким чином, допустимий напружений стан для крихких матеріалів з однаковими межами граничних напружень при розтягуванні та стискуванні визначається з умови

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \leq \sigma_{adm}. \quad (1.63)$$

II теорія міцності (критерій найбільших лінійних деформацій, теорія *Маріотта*): вважаємо, що порушення міцності настає тоді, коли найбільша лінійна деформація $\varepsilon_{\max}$ досягає свого небезпечного значення ε_u , що визначається з експерименту на розтяг (стиск). Умова руйнування

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_u.$$

Умова міцності

$$|\varepsilon_{\max}| \leq \varepsilon_{adm} = \frac{\varepsilon_u}{n}.$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразимо умову міцності через напруження:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \leq \varepsilon_{adm} = \frac{\sigma_u}{En} = \frac{\sigma_{adm}}{E},$$

або

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{adm}. \quad (1.64)$$

Друга теорія міцності виконується для крихких станів матеріалів (легований чавун, сталь після низького отпуск). Формулу (1.64) не можна використовувати для матеріалів, що не підпорядковуються закону Гука або знаходяться за межами пропорційності.

III теорія міцності (критерій найбільших дотичних напружень, теорія *Кулона-Ранкіна*): вважаємо, що граничний стан настає тоді, коли найбільше дотичне напруження $\tau_{\max}$ досягає небезпечного значення τ_u , яке визначається з експерименту на розтяг (стиск). Маємо умову руйнування

$$\tau_{\max} = \tau_u.$$

Умова міцності

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} = \frac{\tau_u}{n}.$$

З (1.29) отримуємо

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \tau_u = \frac{\sigma_u}{2}.$$

Отримуємо умову міцності згідно третьої теорії

$$\sigma_{екв}^{III} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{n}, \quad \sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (1.65)$$

По **IV теорії міцності** (*критерій питомої потенціальної енергії формозміни, теорія Генкі–Губера–Мізеса*) граничний стан настає при досягненні інтенсивністю нормальних напружень свого граничного значення. Користуючись формулою (1.35) рівняння граничного стану можна подати у формі

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sigma_u,$$

де еквівалентні напруження за четвертою теорією, також відомі як еквівалентні напруження за Мізесом, визначаються як

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 - 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \quad (1.66)$$

Ця теорія пов'язана з умовою пластичності Генкі–Губера–Мізеса і застосовується для пластичних матеріалів, які руйнуються переважно шляхом зсуву (в'язке (пластичне) руйнування). Граничне напруження σ_u приймається рівним границі текучості σ_s , тобто $\sigma_u = \sigma_s$.

Умова міцності набуває вигляду

$$\sigma_{екв}^{IV} \leq \sigma_{adm}. \quad (1.67)$$

Слід звернути увагу на те, що допустимий напружений стан визначається при досягненні умов міцності в одній найбільш небезпечній точці.

Деформативні і міцнісні характеристики конкретних матеріалів визначаються експериментально. Основним дослідом є розтягування і стиснення стандартних зразків з цих матеріалів. Вони виконуються на розривних машинах різної конструкції. Одержані дані про індивідуальні властивості матеріалів приводяться в довідковій літературі.

В таблиці 1 [1,8] наведено орієнтовні значення густини ρ , деформативних параметрів E , ν , граничних напружень $\sigma_s, \sigma_\epsilon$, температурного коефіцієнту лінійного розширення α для деяких матеріалів.

При проведенні розрахунків слід мати на увазі, що індивідуальні властивості матеріалів визначаються з похибкою п'ять, а то й більше, відсотків.

Таблиця 1. Механічні характеристики матеріалів.

Матеріал	Густина	Модуль Юнга	Модуль Пуассона	Границя текучості	Границя тимчасового опору	Температурний коефіцієнт
	$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	$E, 10^5 \text{ МПа}$	ν	$\sigma_s, \text{ МПа}$	$\sigma_\epsilon, \text{ МПа}$	$\alpha, 10^{-7} \text{ град}^{-1}$
сталь Ст.3	7,8	2,0	0,3	250	420	125
алюміній, дюралюміній	2,7	0,7	0,34	240	420	255
мідь, бронза	8,5	1,1	0,33	190	250	165
чавун	7,5	1,2	0,25	---	+160/-800	110
скло	2,5	0,56	0,25	---	+50/-500	100
бетон	2,2	0,2	0,17	---	+5/-35	120
граніт	2,5	0,49	0,3	---	+12/-120	120
сосна вздовж волокон	0,5	0,1	---	---	+40/-80	30

Контрольні запитання

1. Що таке напруження?
2. Як визначаються напруження на елементарній площадці?
3. Як отримуються три рівняння рівноваги?
4. Як отримується правило парності дотичних напружень?
5. Що таке тензор напружень?
6. Як визначаються головні напруження і головні площадки?
7. Що таке інваріанти тензора напружень?
8. Як будується еліпсоїд Ламе?
9. Що таке кругова діаграма Мора?
10. Як визначаються екстремальні дотичні напруження?
11. Чому дорівнюють нормальні напруження на площадках з екстремальними дотичними напруженнями?
12. Що таке параметри Ламе?
13. Чому дорівнюють параметри Ламе для простих напружених станів?
14. Як розкласти тензор напружень на кульову і девіаторну складові?
15. Як визначаються інваріанти девіатора напружень? Який зв'язок між другим інваріантом девіатора і інтенсивністю нормальних напружень?
16. Як формулюються тригонометричні формули для визначення головних напружень девіатора?
17. Чому дорівнює кут подібності девіаторів для простих напружених станів?
18. Як формулюються формули Коші для деформацій?
19. Що таке тензор деформацій? Які його властивості?
20. Як визначається кульова і девіаторна складові тензора деформацій?
21. Як формулюється пряма і обернена форма узагальненого закону Гука?
22. Який зв'язок між пружними сталими Ламе і технічними пружними сталими?
23. Який зв'язок між кульовими і девіаторними компонентами тензорів напружень і деформацій?
24. Як формулюються задачі теорії пружності? Що таке граничні умови?
25. Як визначається граничний напружений стан для пластичних і крихких матеріалів?

2. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ (НДС) ЗА ЗАДАНИМ ТЕНЗОРОМ НАПРУЖЕНЬ

2.1. Постановка задачі

Задано компоненти тензора напружень і положення похилої площадки (Додаток 2 згідно шифру). Потрібно визначити значення і напрямки головних напружень, максимальні дотичні напруження, напруження на заданій похилій площадці, оцінити вигляд напруженого стану, перевірити, чи настає граничний стан для конкретних пластичних та крихких матеріалів, визначити пружні деформації.

2.2. План виконання завдання

1. Записати компоненти тензора напружень у вигляді матриці та графічно інтерпретувати окремі випадки напруженого стану.
2. Підготувати вихідні дані для комп'ютерного розрахунку і розшифрувати результати розрахунку.
3. Визначити головні напруження.
4. Визначити положення головних площадок, графічно інтерпретувати напружений стан.
5. Визначити максимальні дотичні напруження.
6. Визначити напруження на заданій похилій площадці, вказати їх на рисунку.
7. Побудувати діаграму Мора. Знайти на діаграмі Мора точку, що відповідає заданій похилій площадці.
8. Розкласти тензор напружень на шаровий тензор і девіатор.
9. Оцінити напружений стан по відношенню до граничного напруженого стану для сталі Ст3 та чавуну (табл. 1).
- 10.3 заданим тензором напружень сформувати тензор деформацій.

2.3. Приклад

Задача. Відомі компоненти тензора напружень

$$\begin{array}{lll} \sigma_x = 34; & \tau_{xy} = -42; & \tau_{xz} = 34; \\ \sigma_y = -44; & \tau_{yz} = 26; & \sigma_z = 37. \end{array}$$

і напрямні косинуси похилої площадки $n_x = 0,4$, $n_z = -0,65$.

Потрібно визначити значення і напрямки головних напружень, максимальні дотичні напруження, напруження на похилій площадці. Оцінити вигляд напруженого стану, перевірити, чи настає граничний стан для сталі Ст3 та чавуну, визначити пружні деформації.

Розв'язання.

1. Записуємо компоненти тензора напружень у вигляді матриці (1.9) відносно осей $x \approx x_1$, $y \approx x_2$, $z \approx x_3$, які утворюють правосторонню систему координат:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & -42 & 34 \\ -42 & -44 & 26 \\ 34 & 26 & 37 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Для компонент тензора напружень прийнято наступне правило знаків: складові напружень вважаються додатними, якщо їх напрями на “видимих” площадках елемента (при спостереженні з боку додатних напрямів осей) збігаються з напрямками осей, яким вони паралельні, а на “невидимих” площадках – протилежні напрямкам відповідних осей (рис. 1.1).

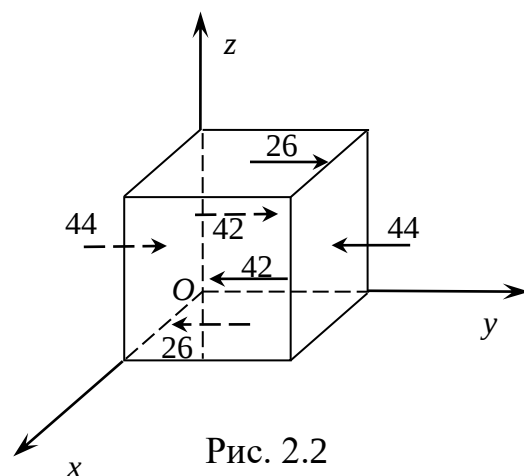
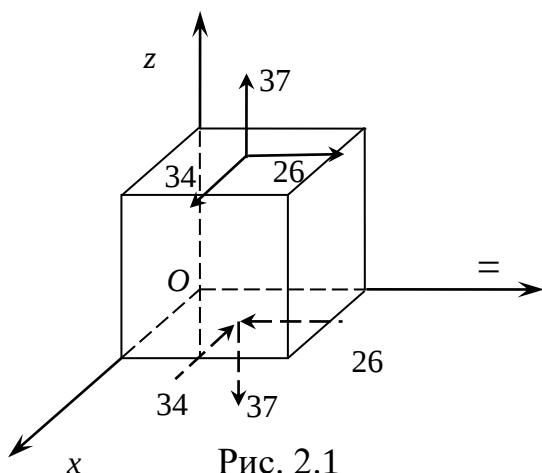
Використовуючи наведене правило знаків, зображуємо на рисунку напруження:

а) які діють на площадках, перпендикулярних до заданої координатної вісі (вісі z) (рис. 2.1):

$$\tau_{zx} = 34 \text{ МПа}; \quad \tau_{zy} = 26 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 37 \text{ МПа};$$

б) які паралельні іншій заданій координатній вісі (вісі y) (рис. 2.2):

$$\tau_{xy} = -42 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -44 \text{ МПа}; \quad \tau_{yz} = 26 \text{ МПа};$$



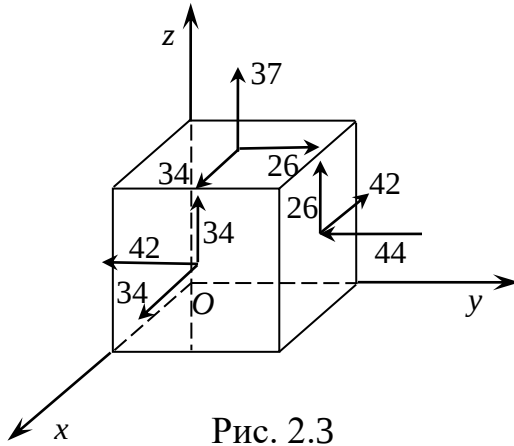


Рис. 2.3

в) які діють на “видимих” площадках елемента (рис. 2.3).

$$\sigma_x = 34 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = -42 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xz} = 34 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = -44 \text{ МПа}; \quad \tau_{yz} = 26 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yx} = -42 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z = 37 \text{ МПа}; \quad \tau_{zx} = 34 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zy} = 26 \text{ МПа}.$$

2. Готуємо дані для визначення головних напружень та напрямних косинусів за допомогою стандартних програм математичних пакетів та існуючих програм розрахунку. Для обчислень потрібно ввести в обчислювальну програму компоненти тензора напружень та коефіцієнти кубічного рівняння (інваріанти напруженого стану), які визначаються за формулами (1.16):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 34 + (-44) + 37 = 27;$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = 34 \cdot (-44) + 34 \cdot 37 + (-44) \cdot 37 - (-42)^2 - 26^2 - 34^2 = -5462;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -42 & 34 \\ -42 & -44 & 26 \\ 34 & 26 & 37 \end{vmatrix} = 34 \cdot (-44) \cdot 37 + (-42) \cdot 26 \cdot 34 + 26 \cdot (-42) \cdot 34 - 34 \cdot (-44) \cdot 34 - 26^2 \cdot 34 - (-42)^2 \cdot 37 = -166996. \quad (2.2)$$

Результат комп'ютерного розрахунку за допомогою програми tensor.exe, виконаної на мові програмування C++, наведено на рис. 2.4.

3. Головні напруження визначаються з кубічного рівняння (1.15).

З врахуванням (2.2) отримуємо характеристичне рівняння

$$\sigma^3 - 27\sigma^2 - 5462\sigma + 166996 = 0. \quad (2.3)$$

Корені кубічного рівняння

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

що є значеннями головних напружень, виписуємо з даних розрахунку на ПЕОМ:

КНУБА		
Кафедра опору матеріалів		
Напружений стан в точці		
Тензор напружень		
34	-42	34
-42	-44	26
34	26	37
Координати нормалі		
$n = \{ n_x, n_y, n_z \} = \{ 0.4, 0.646, -0.65 \}$		
Результати розрахунку		
Інваріанти		
$I_1 = 27; \quad I_2 = -5462; \quad I_3 = -166996$		
Головні напруження		
$s_{11} = 70.8278 \text{ [МПа]}; \quad s_{22} = 31.3589 \text{ [МПа]}; \quad s_{33} = -75.1867 \text{ [МПа]}.$		
Положення головних прощадок		
$n_1 = \{ n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} \} = \{ 0.746134, -0.12483, 0.653989 \}$		
$n_2 = \{ n_{x2}, n_{y2}, n_{z2} \} = \{ -0.511704, 0.520915, 0.683232 \}$		
$n_3 = \{ n_{x3}, n_{y3}, n_{z3} \} = \{ -0.42596, -0.844432, 0.324797 \}$		
Компоненти повного вектора напружень на заданій площадці		
$P_{nx} = -35.632 \text{ [МПа]}; \quad P_{ny} = -62.124 \text{ [МПа]}; \quad P_{nz} = 6.346 \text{ [МПа]}.$		
Повний вектор напружень		
$P_n = 71.8979 \text{ [МПа]}$		
Нормальні та дотичні напруження на заданій площадці		
$s_{nn} = -58.5098 \text{ [МПа]} \quad t_{sn} = 41.784 \text{ [МПа]}$		
Еквівалентні напруження за 3 та 4 теорією міцності		
$seq3 = 146.014 \text{ [МПа]} \quad seq4 = 130.824 \text{ [МПа]}$		

Рис.2.4.

$$\sigma_1 = 70,828 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 31,359 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -75,187 \text{ МПа}. \quad (2.4)$$

Перевіряємо, чи виконується властивість інваріантності тензора напружень (1.16):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 70,828 + 31,359 - 75,187 = 27; \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = 70,828 \cdot 31,359 + 70,828 \cdot (-75,187) + \\ &\quad + 31,359 \cdot (-75,187) = -5462,0038; \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 70,828 \cdot 31,359 \cdot (-75,187) = -166996,488 \approx -166996. \end{aligned} \quad (2.5)$$

4. Знаходимо положення головних осей. Положення головних площадок визначається напрямними косинусами n_i , величини яких знаходяться з системи рівнянь (1.14) або беруться з результатів обчислень в комп'ютерних математичних програмах.

Для знаходження напрямних косинусів за допомогою рівнянь (1.14) замість σ_i підставляємо по черзі значення головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, та отримуємо три системи рівнянь. Розв'язки цих систем утворюють відповідно три трійки значень напрямних косинусів, які є координатами напрямних векторів головних напружень. Слідкуємо за відповідністю головних напружень та нормалей площадок (направних векторів головних осей), перевіряючи, чи виконуються співвідношення (1.17), (1.18) та ортогональність векторів.

Для чисельного знаходження напрямних векторів головних напружень потрібно врахувати, що вони є власними векторами в задачі на визначення власних чисел та власних векторів матриці (2.1) (англійською *eigenvalues and eigenvectors of matrix*), яка розв'язується стандартними програмами в багатьох сучасних математичних пакетах. Якщо порядок нумерації отриманих чисельно власних значень матриці (2.1) не відповідає порядку нумерації головних напружень $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, перенумеровуємо їх та власні вектори в потрібному порядку, слідкуючи за відповідністю між власними числами (головними напруженнями) та власними векторами (направними векторами головних напружень).

Наприклад, в програмі Matlab звернення до стандартної програми визначення власних чисел та власних векторів матриці має вигляд $[N,S] = \text{eig}(T)$, де T – матриця (2.1), N – матриця напрямних косинусів, S – власні значення матриці T , записані в діагональну матрицю. Для проведення обчислень в командне вікно програми вводяться наступне звернення:

```
T=[34 -42 34; -42 -44 26; 34 26 37];
```

```
[N,S] = eig(T)
```

Після натискання клавіші Enter програма видає наступні матриці:

```
N =  0.4260  -0.5117  -0.7461
     0.8444   0.5209   0.1248
     -0.3248  0.6832  -0.6540
S = -75.1867     0     0
     0  31.3589     0
     0     0  70.8278
```

Порівнюючи отримані значення з результатами обчислень з рис. 2.4, бачимо, що програма Matlab розташувала власні значення в порядку зростання; відповідні власним значенням власні вектори формують колонки в матриці $\mathbf{N}$. Значення власних векторів, отриманих різними способами, співпадають з точністю до знаку. Надалі будемо користуватися значеннями напрямних косинусів з рис. 2.4:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= (n_{x1} \ n_{y1} \ n_{z1}) = (0,746 \ -0,125 \ 0,654); \\ \mathbf{n}_2 &= (n_{x2} \ n_{y2} \ n_{z2}) = (-0,512 \ 0,521 \ 0,683); \\ \mathbf{n}_3 &= (n_{x3} \ n_{y3} \ n_{z3}) = (-0,426 \ -0,844 \ 0,325),\end{aligned}\quad (2.6)$$

Перевіряємо, чи вектори утворюють праву трійку:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_{x1} & n_{y1} & n_{z1} \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{z2} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} n_{y1} & n_{z1} \\ n_{y2} & n_{z2} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} n_{x1} & n_{z1} \\ n_{x2} & n_{z2} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} n_{x1} & n_{y1} \\ n_{x2} & n_{y2} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(-0,125 \cdot 0,683 - 0,654 \cdot 0,521) + \mathbf{j}(0,654 \cdot (-0,512) - 0,746 \cdot 0,683) + \\ &+ \mathbf{k}(0,746 \cdot 0,521 - (-0,125) \cdot (-0,426)) = -0,426 \mathbf{i} - 0,844 \mathbf{j} + 0,325 \mathbf{k} = \mathbf{n}_3.\end{aligned}$$

Якщо $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_3$, то для подальших обчислень потрібно змінити напрямок вектора $\mathbf{n}_3$.

Виконуємо перевірку нормованості та ортогональності векторів:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1^2 &= n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = (0,746)^2 + (-0,125)^2 + (0,654)^2 = 0,9998 \approx 1; \\ \mathbf{n}_2^2 &= n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2 = (-0,512)^2 + (0,521)^2 + (0,683)^2 = 1,000074 \approx 1; \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 &= n_{x1}n_{x2} + n_{y1}n_{y2} + n_{z1}n_{z2} = 0,746 \cdot (-0,512) + (-0,125) \cdot 0,521 + \\ &+ 0,654 \cdot 0,683 = 0,000259 \approx 0.\end{aligned}$$

На рис. 2.5 показуємо положення головних осей та напрямок головних напружень $\sigma_1 = 70,828 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 31,359 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -75,187 \text{ МПа}$. Напрямок кожної головної нормалі в координатах x, y, z визначається положенням лінії, що проходить через початок координат і точку, координати якої дорівнюють значенням напрямних косинусів цієї головної нормалі. Головні напруження зображують в вигляді векторів, які напрямлені вздовж головних нормалей. Якщо головне напруження розтягуюче (додатне), то вектор напрямлений від початку координат, а якщо стискаюче (від'ємне) – то до початку координат.

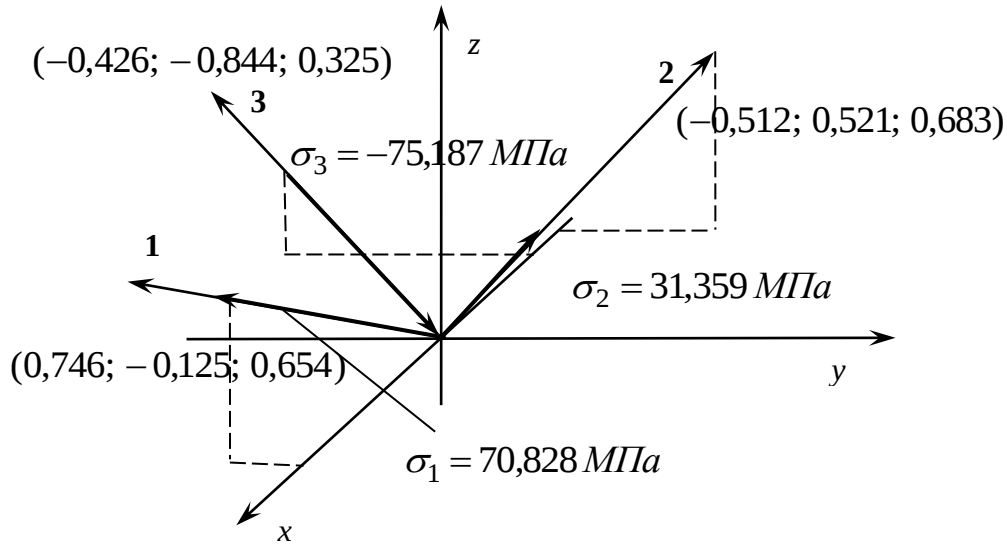


Рис. 2.5

При переході до головних осей отримуємо напружений стан, зображений на рис. 2.6.

5. Максимальні дотичні напруження (1.27) дорівнюють піврізниці відповідних головних напружень і діють на площадках, нахилених до головних площадок під кутом 45° . На цих самих площадках діють нормальні напруження (1.28), які дорівнюють півсумі відповідних головних напружень. Визначаємо максимальні значення дотичних напружень та відповідних нормальних напружень. Наносимо на рисунок площадки, на яких вони діють:

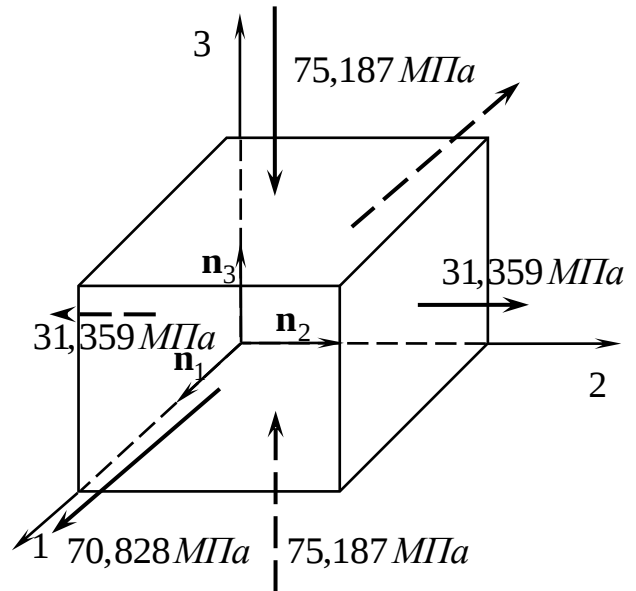


Рис. 2.6.

а) на рис. 2.7: $\tau_s^{(12)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{70,828 - 31,359}{2} = 19,7345 \text{ МПа};$

$$\sigma_n^{(12)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{70,828 + 31,359}{2} = 51,0935 \text{ МПа};$$

б) на рис.2.8: $\tau_s^{(23)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{31,359 + 75,187}{2} = 53,273 \text{ МПа};$

$$\sigma_n^{(23)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{31,359 - 75,187}{2} = -21,914 \text{ МПа};$$

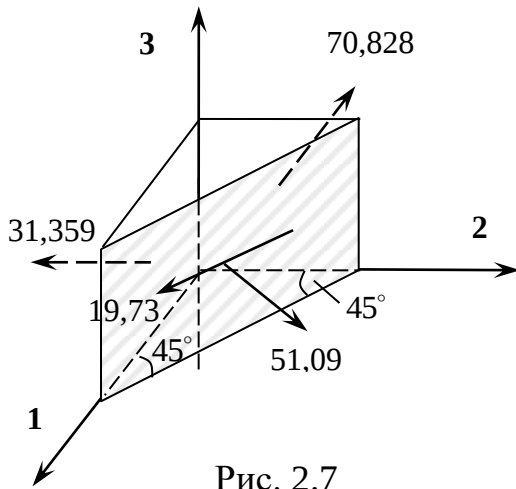


Рис. 2.7

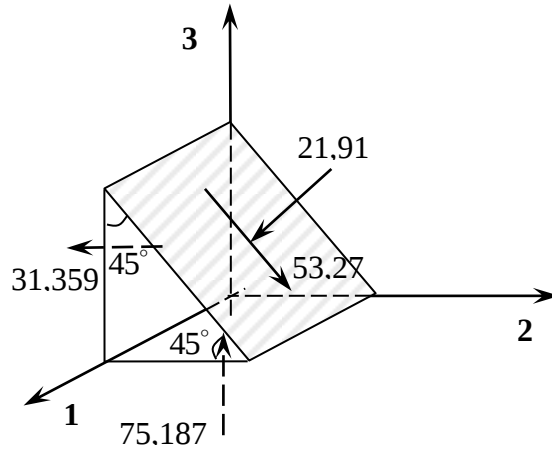


Рис. 2.8

в) на рис. 2.9:

$$\tau_s^{(31)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{70,828 - (-75,187)}{2} = 73,0075 \text{ МПа};$$

$$\sigma_n^{(31)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{70,828 + (-75,187)}{2} = -2,1795 \text{ МПа}.$$

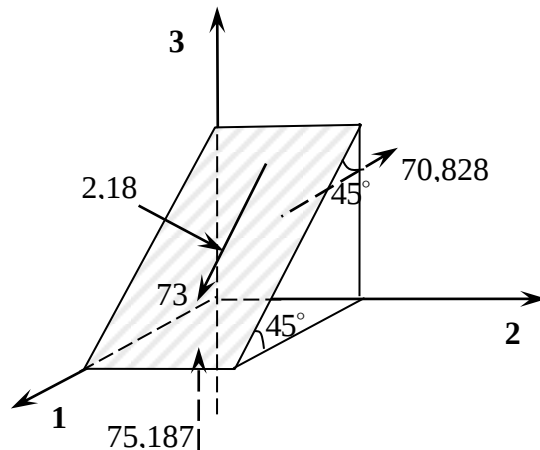


Рис. 2.9

6. Маючи два напрямних косинуси, наприклад, n_x, n_y , з умови (1.17) $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ знаходимо $n_z = \pm \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2}$. З двох значень n_z вибираємо одне з них, наприклад, додатнє. Для площадки, заданої у початкових осях напрямними косинусами нормалі $n_x = 0,4$, $n_z = -0,65$, маємо

$$n_y = \sqrt{1 - n_x^2 - n_z^2} = \sqrt{1 - 0,4^2 - (-0,65)^2} = 0,646.$$

Отриманому вектору відповідає певна похила площадка. На цій площадці за співвідношеннями (1.22), (1.23) визначаємо величини проекцій повного напруження по цій площадці на координатні вісі

$$\sigma_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 34 \cdot 0,4 - 42 \cdot 0,646 - 34 \cdot 0,65 = -35,632 ;$$

$$\sigma_{ny} = \tau_{yx}n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz}n_z = -42 \cdot 0,4 - 44 \cdot 0,646 - 26 \cdot 0,65 = -62,124;$$

$$\sigma_{nz} = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_z n_z = 34 \cdot 0,4 + 26 \cdot 0,646 - 37 \cdot 0,65 = 6,346.$$

Знаходимо повне напруження:

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2} = \sqrt{(-35,632)^2 + (-62,124)^2 + (6,346)^2} = 71,898 \text{ МПа}.$$

Визначаємо нормальне напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{nx}n_x + \sigma_{ny}n_y + \sigma_{nz}n_z = -35,632 \cdot 0,4 - 62,124 \cdot 0,646 - 6,346 \cdot 0,65 = \\ &= -58,510 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Знаходимо модуль дотичного напруження:

$$\tau_{ns} = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{(71,898)^2 + (-58,51)^2} = 41,784 \text{ МПа}.$$

Обчислюємо напрямні косинуси повного напруження $n_{x\sigma}$, $n_{y\sigma}$, $n_{z\sigma}$

$$n_{x\sigma} = \frac{\sigma_{xn}}{\sigma_n} = \frac{-35,632}{71,898} = -0,4956;$$

$$n_{y\sigma} = \frac{\sigma_{yn}}{\sigma_n} = \frac{-62,124}{71,898} = -0,8641; \quad n_{z\sigma} = \frac{\sigma_{zn}}{\sigma_n} = \frac{6,346}{71,898} = 0,088.$$

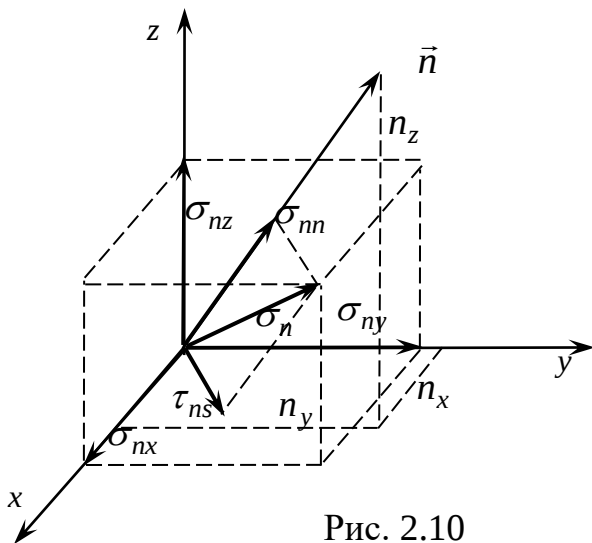


Рис. 2.10

Розглянемо порядок нанесення на рисунок напружень на похилій площадці (рис. 2.10). В першу чергу з початку координат відкладаємо на координатних осях складові повного напруження σ_{nx} , σ_{ny} , σ_{nz} . На цих векторах будемо паралелепіпед, головною діагоналлю якого буде повне напруження σ_n . Знаючи величини напрямних косинусів, наносимо по-

ложення нормалі до площадки. На нормалі відкладаємо нормальну складову σ_{nn} повного напруження σ_n . Дотичне напруження τ_{ns} перпендикулярне до $\mathbf{n}\sigma_{nn}$ і дорівнює різниці векторів $\sigma_n - \mathbf{n}\sigma_{nn}$.

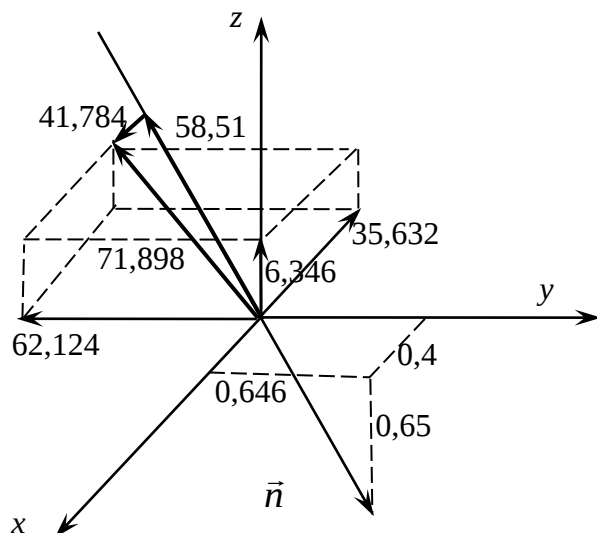


Рис. 2.11

Визначені напруження на похилій площадці наносяться на рис. 2.11.

$$\sigma_{nx} = -35,632 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{ny} = -62,124 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{nz} = 6,346 \text{ МПа};$$

$$\sigma_n = 71,898 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{nn} = -58,510 \text{ МПа};$$

$$\tau_{ns} = 41,784 \text{ МПа}.$$

7. Для побудови діаграми Мора (рис. 1.5) в системі координат σ_{nn} , τ_{ns} визначаємо радіуси кіл за співвідношеннями (1.26):

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{70,828 - 31,359}{2} = 19,7345 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{31,359 + 75,187}{2} = 53,273 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{70,828 - (-75,187)}{2} = 73 \text{ МПа}.$$

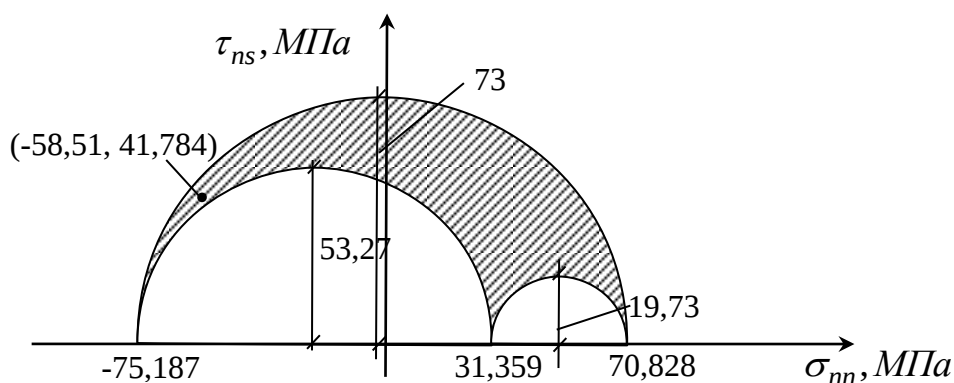


Рис. 2.12

Отриману діаграму Мора в системі координат σ_{nn} , τ_{ns} наведено на рис. 2.12. Позначаємо на діаграмі точку з координатами $(\sigma_{nn}, \tau_{ns}) = (-58,51, 41,784)$, яка відповідає заданій похилій площадці.

8. Розкладаємо тензор напружень на шаровий тензор і девіатор за співвідношеннями (1.32):

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{34 - 44 + 37}{3} = 9;$$

$$T_\sigma = T_{\sigma 0} + D_\sigma, \quad T_{\sigma 0} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 - 9 & -42 & 34 \\ -42 & -44 - 9 & 26 \\ 34 & 26 & 37 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -42 & 34 \\ -42 & -55 & 26 \\ 34 & 26 & 28 \end{bmatrix}.$$

Наносимо на рис. 2.13 компоненти девіатора напружень, що діють на “видимих” площинках:

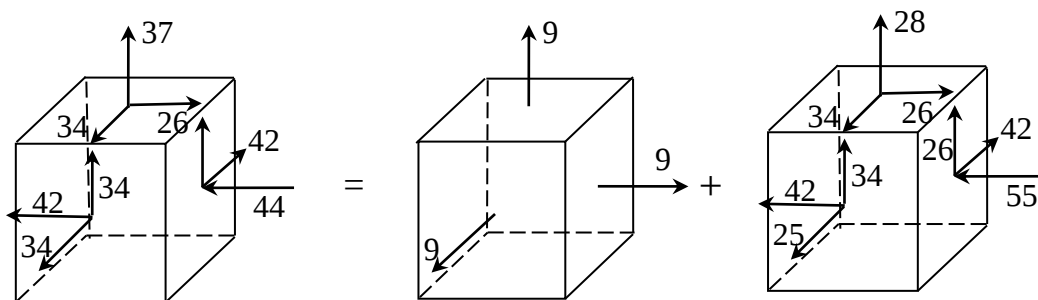


Рис. 2.13

9. Оцінюємо заданий напружений стан по відношенню до граничного стану.

Для пластичного матеріалу граничне напруження σ_u беремо рівним границі текучості σ_s і користуємося критерієм (1.64). Визначаємо еквівалентні напруження за Мізесом;

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(34 + 44)^2 + (-44 - 37)^2 + (37 - 34)^2 - 6((-42)^2 + 26^2 + 34^2)]} \approx \approx 131 \text{ МПа}.$$

Для Ст3 границя текучості $\sigma_s = 250 \text{ МПа}$ (табл.1). Отже, граничний стан не досягається.

Для крихких матеріалів, які мають однакові значення тимчасового опору при розтягуванні і стискуванні, граничне напруження σ_u беремо рів-

ним границі тимчасового опору σ_{ϵ} і користуємося критерієм найбільших нормальних напружень

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) = \sigma_u = \sigma_{\epsilon}.$$

Для матеріалів, які мають різні значення тимчасового опору при розтягуванні σ_{ϵ}^+ і стискуванні σ_{ϵ}^- , оцінка граничного стану проводиться окремо для розтягуючих і стискуючих головних напружень відносно відповідних значень тимчасового опору σ_{ϵ}^+ , σ_{ϵ}^- . Наприклад, для чавуну $\sigma_{\epsilon}^+ \approx 160 \text{ МПа}$, $\sigma_{\epsilon}^- \approx 800 \text{ МПа}$ (табл. 1). Оскільки для даного напруженого стану максимальні розтягуючі напруження $\sigma_1 = 70,828 \text{ МПа}$, а максимальні стискуючі напруження рівні $\sigma_3 = -75,187 \text{ МПа}$, то граничний стан не досягається.

10. Оскільки границя пропорційності σ_{np} , границя пружності σ_e та границя текучості σ_s для пластичного матеріалу практично мало відрізняються між собою, то заданий напружений стан знаходиться в межах застосування закону Гука (в межах пружності).

Для крихких матеріалів закон Гука приймається вірним до досягнення границі тимчасового опору.

Таким чином, компоненти тензора пружних деформацій знаходяться за допомогою узагальненого закону Гука (1.55).

Лінійні деформації

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5}(34 - 0.3(-44 + 37)) = 1,8 \cdot 10^{-4};$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5}(-44 - 0.3(34 + 37)) = -3,27 \cdot 10^{-4};$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5}(37 - 0.3(34 - 44)) = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Модуль зсуву визначаємо за (1.58) при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} = 7,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Зсувні деформації

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{26}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^4} = 1,67 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} = \frac{34}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^4} = 2,21 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{-42}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^4} = -2,73 \cdot 10^{-4}.$$

Отримані значення записуємо в вигляді тензора деформацій

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,8 & -2,73 & 2,21 \\ -2,73 & -3,27 & 1,67 \\ 2,21 & 1,67 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Відрізок Δx , паралельний вісі x , набуває довжини $(1 + 1,8 \cdot 10^{-4})\Delta x$;
 відрізок Δy , паралельний вісі y , набуває довжини $(1 - 3,27 \cdot 10^{-4})\Delta x$; відрізок
 Δz , паралельний вісі z , набуває довжини $(1 + 2 \cdot 10^{-4})\Delta x$.

Прямий кут між відрізками, паралельними вісям x та y , збільшується на $2 \cdot 2,73 \cdot 10^{-4}$ рад; прямий кут між відрізками, паралельними вісям x та z , зменшується на $2 \cdot 2,21 \cdot 10^{-4}$ рад; кут між відрізками, паралельними вісям y та z , зменшується на $2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-4}$ рад.

3. РОЗРАХУНОК ОСЕСИМЕТРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА

3.1. Внутрішні зусилля в оболонках

Оболонка вважається *тонкою*, якщо $\frac{h}{a}, \frac{h}{b} < \frac{1}{10}$, де h - товщина, a, b - пла-

нарні розміри оболонки. До тонких оболонок можна віднести цистерни, водонапірні резервуари, повітряні і газові балони, купола будинків, котли та ін.

Серединна поверхня оболонки- геометричне місце точок, рівновіддалених від її зовнішніх поверхонь.

Головні радіуси кривизни ρ_1, ρ_2 - мінімальний та максимальний радіуси січних до серединної поверхні кривих. Відповідні їм криві називаються *лініями головних кривизн*. В довільній точці поверхні лінії головних кривизн перпендикулярні між собою.

Головні кривизни κ_1, κ_2 - обернені до головних радіусів величини:
 $\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1}, \kappa_2 = \frac{1}{\rho_2}$. Центри кривизни лежать на нормалі до поверхні і є центрами кіл з радіусами ρ_1, ρ_2 .

Полога оболонка- тіло, у якого радіуси кривизни серединної поверхні великі порівняно з товщиною (кривизна мала порівняно з товщиною).

Пологі оболонки відносимо до *криволінійної ортогональної системи* координат з осями 1, 2, 3, де напрямки осей 1, 2 співпадають з головними кривизнами серединної поверхні, 3- нормаль до поверхні (рис. 3.1).

В загальному випадку в перерізах з нормальними 1,2 діють:

- N_1, N_2 - сили на розтяг (нормальні),
- Q_1, Q_2 - поперечні сили,
- S_1, S_2 - зсувні зусилля,
- M_1, M_2 - згинальні моменти,
- $M_{\kappa_1}, M_{\kappa_2}$ - крутні моменти.

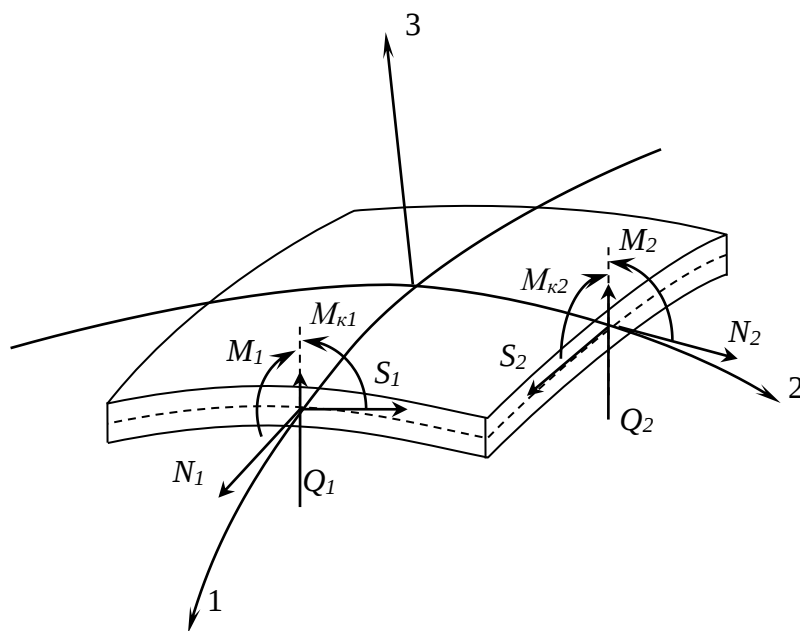


Рис. 3.1. Внутрішні зусилля в елементі оболонки

Маємо 10 невідомих функцій, тобто потрібно побудувати 10 диференціальних рівнянь для їх знаходження. Отримуємо складну математичну задачу. Але при певних типах навантаження кількість невідомих зменшується, і опис спрощується.

Наприклад, якщо оболонка є тілом обертання при осесиметричному навантаженні, то задача осесиметрична. В такому випадку

$$M_{\kappa 1} = M_{\kappa 2} = S_1 = S_2 = Q_1 (\text{або } Q_2) = 0, \quad (3.1)$$

тобто залишається п'ять невідомих силових факторів.

Якщо якісь зусилля або моменти малі в порівнянні з іншими, то ними можна знехтувати. При певних навантаженнях можна вважати

$$M_1 = M_2 = M_{\kappa 1} = M_{\kappa 2} = 0, \quad Q_1 = Q_2 = 0, \quad (3.2)$$

що є основним положенням *безмоментної теорії*.

3.2. Тонкостінний резервуар.

Розглянемо резервуар, що є осесиметричною оболонкою, тобто тілом обертання певної кривої $r(z)$ навколо вісі симетрії z (рис. 3.2). Товщина h оболонки мала порівняно з радіусами кривизни. Нехай він знаходиться під впливом внутрішнього або зовнішнього тиску $p(z)$ від газу

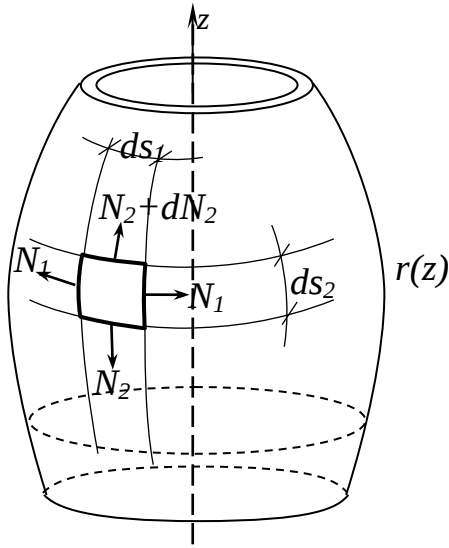


Рис. 3.2. Тонкостінний резервуар

паралельні головним кривизнам з радіусами ρ_1, ρ_2 :

$$ds_1 = \rho_1 d\varphi_1, \quad ds_2 = \rho_2 d\varphi_2. \quad (3.3)$$

Для довільної кривої $r(z)$ радіуси кривизни та кут нахилу дотичної α знаходяться за формулами

$$\rho_1 = \rho_t = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{r}{r'} \sqrt{1 + (r')^2}; \quad \rho_2 = \rho_m = \frac{\sqrt{1 + (r')^2}}{r''}; \quad \operatorname{tg} \alpha = r'. \quad (3.4)$$

Розглянемо рівновагу елемента $ds_1 ds_2$ під впливом внутрішнього тиску p (Рис. 23.3). Запишемо суму проекцій всіх сил на нормаль n :

$$N_2 ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} + (N_2 + dN_2) ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} + 2N_1 ds_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} - p ds_1 ds_2 = 0.$$

Враховуючи (3.3) та виконуючи граничний перехід для малих кутів

$$\sin \frac{d\varphi_1}{2} \approx \frac{d\varphi_1}{2}, \quad \sin \frac{d\varphi_2}{2} \approx \frac{d\varphi_2}{2},$$

маємо

$$2N_2 \rho_1 d\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{2} + dN_2 \rho_1 d\varphi_1 d\varphi_2 + 2N_1 \rho_2 d\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{2} - p \rho_1 d\varphi_1 \rho_2 d\varphi_2 = 0.$$

або рідини, що знаходяться всередині. При такому навантаженні можна вважати, що припущення (3.1) та (3.2) виконуються. Така оболонка знаходиться в безмоментному напруженому стані, тобто ненульовими є лише нормальні зусилля N_1, N_2 та відповідні їм напруження σ_1, σ_2 .

Розглянемо виділений на рис. 3.2 елемент $ds_1 ds_2$, грані якого па-

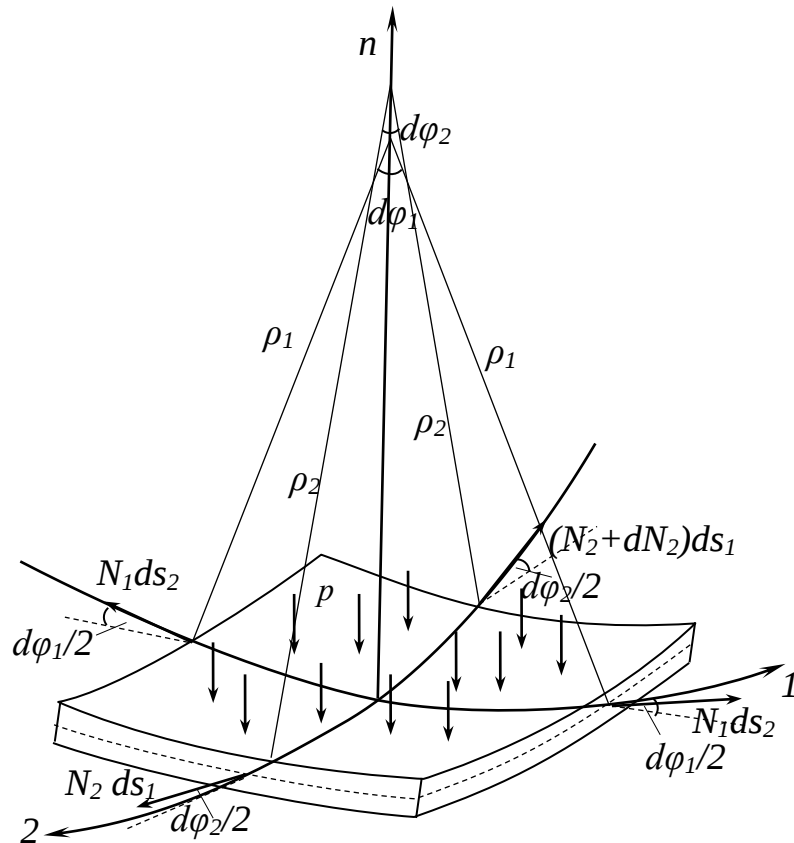


Рис. 3.3. Рівновага елемента оболонки

Відкидаємо доданок третього порядку малості, ділимо все рівняння на $\rho_1 \rho_2 d\phi_1 d\phi_2$ та остаточно отримуємо *рівняння рівноваги*

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = p. \quad (3.5)$$

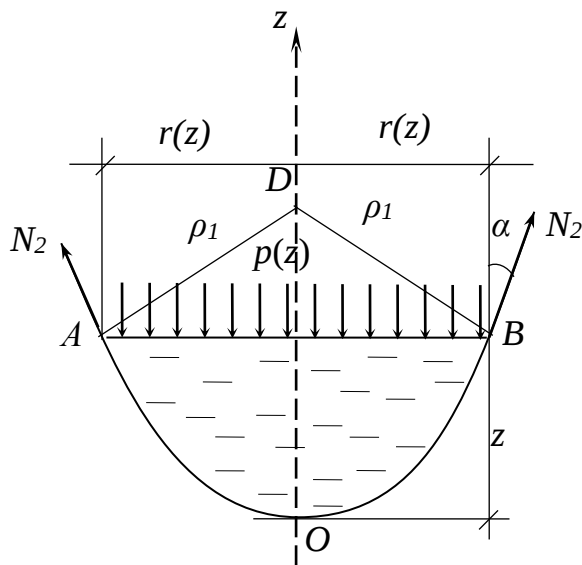


Рис. 3.4. Відрізана нижня частина резервуару

Рівняння рівноваги (3.5) включає дві невідомі. Для додаткового рівняння розглянемо рівновагу відрізаної частини оболонки AOB , що відтинається конічною поверхнею ADB , нормальною до серединної поверхні оболонки. Нехай вона навантажена внутрішнім тиском, рівнодійна

якого зводиться до добутку p на площу кола з радіусом r , власною вагою $Q_{\text{об}}$ оболонки AOB та вагою рідини Q_p . Сили N_2 діють в кожній точці контуру перерізу (кола з радіусом r) під кутом α до вертикальної вісі. Проектуємо сили на вертикальну вісь z :

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r - p \cdot \pi r^2 - Q_{\text{об}} - Q_p = 0,$$

$$N_2 = \frac{pr}{2 \cos \alpha} + \frac{Q_{\text{об}} + Q_p}{2\pi \cos \alpha}. \quad (3.6)$$

Ми отримали вираз для знаходження меридіональної сили N_2 . Отже, нормальні зусилля N_1, N_2 для тонкостінного резервуару знаходяться з (3.5) та (3.6).

3.3. Умова міцності резервуара

Для оцінки міцності потрібно перейти від сил до напружень. Оскільки в перерізах діють лише нормальні сили, по аналогії з розтягом(стиском) стержнів для оболонок будемо вважати, що нормальні напруження стали по товщині, тобто

$$N_1 = \sigma_t h, \dots N_2 = \sigma_m h. \quad (3.7)$$

Тут σ_t - окружні нормальні напруження, σ_m - меридіональні нормальні напруження.

Співвідношення (3.5) перетворюється до вигляду, відомого під назвою *формули Лапласа*:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_1} + \frac{\sigma_m}{\rho_2} = \frac{p}{h}, \quad (3.8)$$

З (3.6) маємо *рівняння рівноваги зони*

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{Q_{\text{об}} + Q_p}{2\pi h \cos \alpha}. \quad (3.9)$$

Геометрична та фізична сторона задачі не розглядалася в силу припущень про постійність напружень σ_m, σ_t по товщині оболонки.

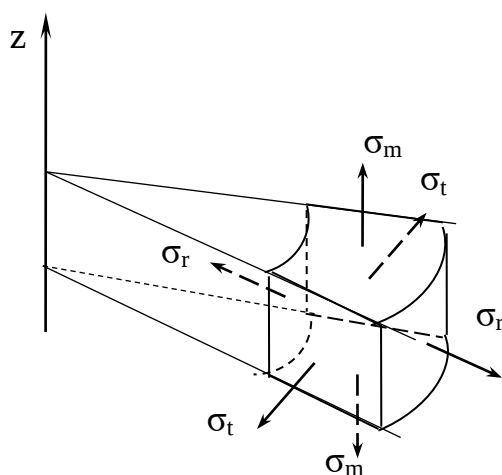


Рис. 3.5. Напруження в стінці оболонки

Задача виявилася статично визначеною.

Оскільки дотичні напруження відсутні, нормальні напруження σ_m, σ_t є головними. Третє головне напруження σ_r на внутрішній поверхні рівне заданому тиску p , на зовнішній поверхні рівне нулю. Вважаємо його набагато меншим за σ_m, σ_t : $\sigma_r \ll \sigma_m, \sigma_t$. Тоді по четвертій умові (для пластичних матеріалів) отримуємо умову міцності

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.10)$$

З умови міцності (3.10) визначаємо допустиме навантаження або товщину стінки резервуара.

Розрахунок резервуара по формулах (3.8), (3.9) проводиться в перерізах, досить віддалених від днищ, точок закріплення, поверхневих зосереджених сил та моментів, оскільки вплив цих факторів може приводити до виникнення згинальних або крутильних навантажень (безмоментну теорію вже не можна застосовувати). Для складніших випадків навантаження розрахунок проводиться за теорією пластин та оболонок.

Приклад. а) Визначити напруження в стінці сферичного балона, заповненого газом з тиском p . Радіус серединної поверхні R , товщина стінки h .

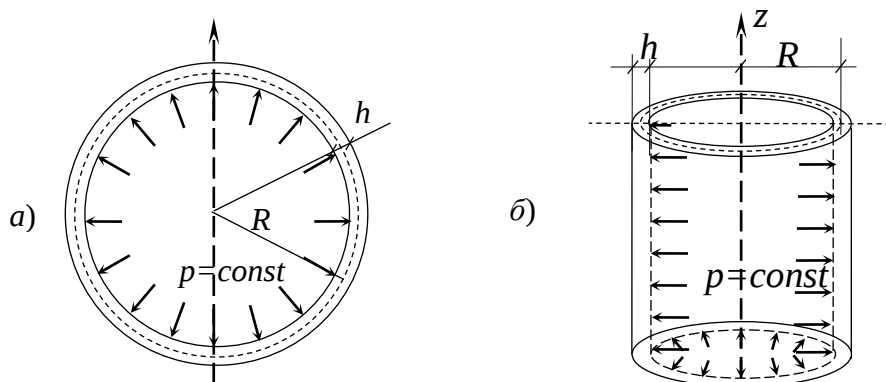


Рис. 3.6. Резервуари сферичної та циліндричної форми

Розв'язання. В силу симетрії радіуси кривизни сфери $\rho_1 = \rho_2 = R$, напруження $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$. З (23.8) маємо

$$\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h}, \quad \sigma = \frac{pR}{2h}.$$

Умова міцності (3.10) приймає вигляд

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2} - \sigma_m \sigma_t = \sigma = \frac{pR}{2h} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.11)$$

З (3.11) визначається товщина стінки або допустимий тиск для сферичного балона.

б) Визначити напруження в стінці циліндричного балона, заповненого газом з тиском p . Радіус серединної поверхні R , товщина стінки h .

Розв'язання. Для циліндра меридіональний радіус кривизни $\rho_1 = R$, по довжині маємо $\rho_2 = \infty$ (твірною є пряма, для прямої радіус кривизни $\rho = \infty$). З (23.8) маємо

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h}, \quad \sigma_t = \frac{pR}{h}.$$

Меридіональні напруження знаходимо з рівняння рівноваги зони (3.9). Якщо $Q_{\phi\phi} = Q_p = 0$, то

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h \cos \alpha}.$$

Тут кут α – кут нахилу дотичної до твірної відносно вісі z . Отримана формула підходить для конусів (домни, котли, димоходи). Для циліндрів $\alpha = 0$.

Отже, для циліндрів під дією внутрішнього тиску напруження визначаються за формулами

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}, \quad \sigma_m = \frac{pR}{2h}. \quad (3.12)$$

З (3.12) бачимо, що для циліндричних балонів окружні напруження вдвічі вищі, ніж поздовжні. Тому поздовжній шов повинен бути вдвічі міцніший за поперечний.

Умова міцності (3.10) приймає вигляд

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{pR}{2h}\right)^2 + \left(\frac{pR}{h}\right)^2} - \frac{pR}{2h} \cdot \frac{pR}{h} = \frac{\sqrt{3}pR}{2h} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.13)$$

3.4. Розпирні кільця в оболонках.

Для оболонок обертання, твірні яких являють собою плавні криві з неперервною кривизною, розрахунки по безмоментній теорії дають досить задовільні результати. Але в точках зломів поверхні, в точках приєднання

днищ або секцій іншої кривизни ситуація може змінитися.

Розглянемо вплив зломів *твірної* на напружений стан оболонки [3]. Нехай в деякому перерізі *a-a* оболонка має злом: дотичні утворюють кут $180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2$. Розглянемо меридіональні напруження σ_{m1} та σ_{m2} в перерізах. Проектуємо напруження, що діють на кільце *b-b* *d-d*, на вертикальну вісь. З рівняння рівноваги маємо

$$2\pi r \sigma_{m1} h_1 \cos \alpha_1 = 2\pi r \sigma_{m2} h_2 \cos \alpha_2.$$

Записуємо проекцію всіх сил на горизонтальну вісь. Оскільки напруження діють в одному напрямку, робимо висновок, що рівноваги немає

$$\sigma_{m1} h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m2} h_2 \sin \alpha_2 \neq 0.$$

Це означає, що в місці злому виникає додаткове місцеве навантаження *q*, що стискує оболонку і викликає згинні зусилля:

$$q = \sigma_{m1} h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m2} h_2 \sin \alpha_2. \quad (3.14)$$

Для того щоб зменшити згин, в резервуарах встановлюють ребра жорсткості, або розпирні кільця, які приймають на себе радіальні зусилля *q*. Умова міцності для кільця має вигляд

$$\frac{qR}{A} \leq \sigma_{adm}, \quad (3.15)$$

де *R* - радіус вісі кільця, *A* - площа його перерізу.

При дії зовнішнього тиску меридіональні напруження будуть від'ємними, а *q* буде направлене зовні оболонки. Тоді кільце працюватиме не

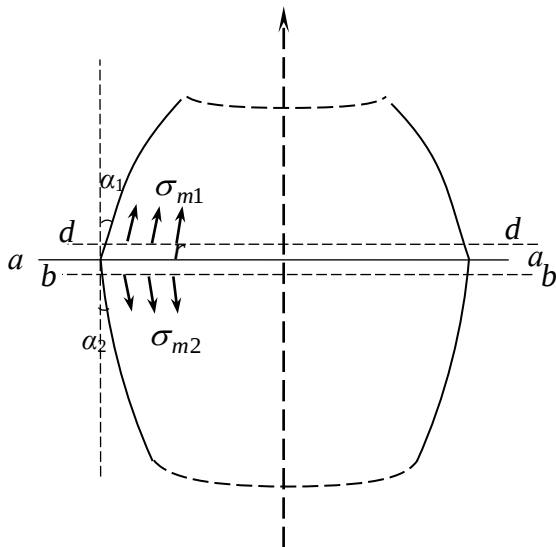


Рис. 3.7. Злом поверхні оболонки

на стиск, а на розтяг. Часто замість розпiрного кiльця використовується потовщення стiнки, утворене накладанням стiнок секцiй.

3.5. Приклад розрахунку тонкостiнного резервуара

Постановка задачi

Для цилiндричного балона з сферичними торцями пiдбрати товщину стiнок та площу розпiрного кiльця. Тиск, допустиме напруження, радиуси цилiндра та сфери взяти з Додатку 3 згiдно до шифру, виданого викладачем.

Приклад. Для цилiндричного резервуара з сферичними торцями пiдбрати товщину стiнок та площу розпiрного кiльця. Дано: тиск $p = 5 \text{ МПа}$, допустиме напруження $\sigma_{adm} = 180 \text{ МПа}$, радиус цилiндра $r = 2 \text{ м}$, радиус сфери $R = 3 \text{ м}$ (рис. 3.8).

Розв'язання. Пiдбираємо товщину стiнки цилiндра. З умови мiцностi (3.12)

$$\frac{\sqrt{3}pr}{2h} \leq \sigma_{adm} \rightarrow h_1 = \frac{\sqrt{3}pr}{2\sigma_{adm}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 5 \text{ МПа} \cdot 2 \text{ м}}{2 \cdot 180 \text{ МПа}} = 0,048 \text{ м} \approx 5 \text{ см}$$

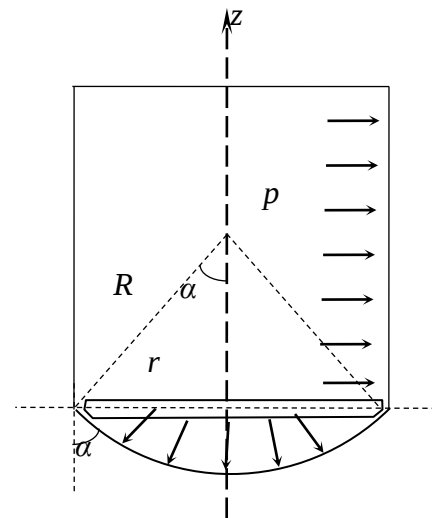


Рис. 3.8. Цилiндричний резервуар з сферичними торцями

З умови мiцностi для сфери (3.10) маємо

$$\frac{pR}{2h} \leq \sigma_{adm} \rightarrow h_2 \geq \frac{pR}{2\sigma_{adm}} = \frac{5 \text{ МПа} \cdot 3 \text{ м}}{2 \cdot 180 \text{ МПа}} = 0,0417 \approx 4,2 \text{ см.}$$

Меридіональнi напруження в цилiндрi та сферi приймають значення

$$\sigma_{m1} = \frac{pr}{2h_1} = \frac{5 \text{ МПа} \cdot 2 \text{ м}}{2 \cdot 0,05} = 100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{m2} = \frac{pR}{2h_2} = \frac{5 \text{ МПа} \cdot 3 \text{ м}}{2 \cdot 0,042} = 178,6 \text{ МПа}.$$

Визначаємо стискуючі зусилля q на контурі торця за (3.14). Тут $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha$:

$$q = \sigma_{m1} h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m2} h_2 \sin \alpha_2 = 0 + \frac{pR}{2h_2} h_2 \cos \alpha =$$

$$= \frac{pr}{2} \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 2}{2} \frac{\sqrt{3^2 - 2^2}}{3} = 3,73 \cdot 10^6 \frac{H}{м}.$$

Якщо вважати, що радіус розпирного кільця $R_{\kappa} \approx r$, то площа перерізу кільця знаходиться за формулою

$$A_{\kappa} = \frac{qr}{\sigma_{adm}} = \frac{3,73 \cdot 10^6 \cdot 2}{180 \cdot 10^6} \frac{H}{Па} = 0,041 м^2.$$

Контрольні запитання

1. Яке тіло відноситься до тонких оболонок?
2. Яке тіло називається оболонкою обертання?
3. Як вводиться система координат для пологих оболонок?
4. Які зусилля виникають в стінці оболонки?
5. Скільки рівнянь потрібно для знаходження внутрішніх зусиль в оболонці?
6. Як спрощується постановка задачі для тіл обертання?
7. Що таке безмоментна теорія? Які переваги вона дає?
8. Коли можна користуватися безмоментною терією?
9. Які зусилля виникають в стінці тонкостінного резервуару?
10. Як визначаються головні радіуси кривизни резервуару?
11. Як отримується рівняння рівноваги?
12. Як виконується перехід від поздовжніх сил до напружень?
13. Що описує рівняння Лапласа?
14. Які компоненти входять в рівняння рівноваги зони?
15. Як проводиться перевірка міцності резервуару?
16. Як визначаються напруження в сферичному резервуарі?
17. Як визначаються напруження в циліндричному резервуарі?
18. Як підбирається допустиме навантаження або необхідна товщина стінки резервуару?
19. Що таке розпирні кільця? Коли вони потрібні?
20. Як визначається навантаження на розпирне кільце?
21. Як підбирається переріз розпирного кільця?

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів
20__ - 20__ навчальний рік

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №

(назва роботи)

Шифр _____

Факультет _____

Курс _____

Група _____

Студент (П.І.Б.) _____

Керівник (П.І.Б.) _____

Дата здачі завдання _____

Оцінка _____

Вхідні дані до задачі «Аналіз просторового напруженого стану»

	Компоненти тензора напружень					
	Перша цифра шифру			Друга цифра шифру		
	σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}	σ_{yy}	τ_{yz}	σ_{zz}
1	33	-24	23	-25	40	36
2	-20	18	-14	44	-13	18
3	37	29	-19	34	17	-28
4	54	-32	32	-45	27	71
5	62	-10	26	56	-38	64
6	-45	15	30	23	49	-52
7	25	13	-22	-31	56	42
8	-13	27	18	37	-42	29
9	47	30	29	29	51	-36
0	56	21	-43	-40	45	29
	Третя цифра шифру					
	Напрявні косинуси			Осі координат		
	n_x	n_y	n_z	x	y	z
1	0,40	0,55		+		+
2	0,60		0,25		+	+
3		0,35	0,45	+	+	
4	0,50		0,35		+	+
5	0,15	0,65		+		+
6		0,45	0,25	+	+	
7	0,30		0,55		+	+
8	0,65	0,30		+		+
9		0,40	0,55	+	+	
0	0,25		0,60		+	+

Вхідні дані до задачі «Розрахунок тонкостінного резервуару»

Цифра шифру	Перша цифра шифру	Друга цифра шифру	Третя цифра шифру	
	Радіус цилін- дра	Радіус сфери- чної частини	Тиск	Допустимі напруження
	r, м	R, м	p, МПа	σ_{adm} , МПа
1	2	2,5	2	100
2	2,5	3	2,5	120
3	2,8	3,5	3	130
4	1,2	3,3	3,5	140
5	1,5	2,3	4	150
6	0,5	4,4	1,2	160
8	0,8	3,6	2,2	170
8	2,2	3,8	3,2	180
9	1,1	2,8	1,5	190
0	1,4	2,6	3,6	200

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники:

1. *Писаренко, Г. С.* та ін. Опір матеріалів: Підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. Г.С. Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ: Вища шк., 2004. – 655с.
2. *Шкельов Л.Т.* Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
3. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн.* / За ред. В.Г. Піскунова. – Київ : Вища школа, 1995.

Навчальні посібники:

4. *О.П. Кошевий, Григор'єва Л.О., Д.В. Левківський.* Опір матеріалів в Темах і задачах: навчальний посібник. Київ: КНУБА; –Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута», 2019. – 340с. ISBN 978-617-7626-86-1
5. *Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, О.П. Кошевий.* Опір матеріалів з основами теорії пружності: Курс лекцій. Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 270 с. ISBN 978-617-520-044-5
6. *Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб.* / П.О. Іваненко, Л.О. Григор'єва, О.П. Кошевий та ін. За ред. П.О. Іваненка – Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 400 с. ISBN 978-617-520-163-3

Додаткові джерела:

7. *Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб.* / М. І. Бобир, А. Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; за ред. М. І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. –399 с.
8. Hibbeler, R.C. Mechanics of materials / R.C. Hibbeler. Tenth edition. –NJ: Pearson, 2015. – 900 p.– ISBN 9780134319650
9. Серія відеоуроків та лабораторних робіт з опору матеріалів на Youtube
10. https://www.youtube.com/channel/UC4ptzya-AQGAFDj18iOB_rA ,
https://youtu.be/tibdfe_Q2s8
11. Освітній сайт КНУБА. Курс для дистанційного навчання «Опір матеріалів з основами теорії пружності»
<https://org2.knuba.edu.ua/course/view.php?id=4520>